高代习题课

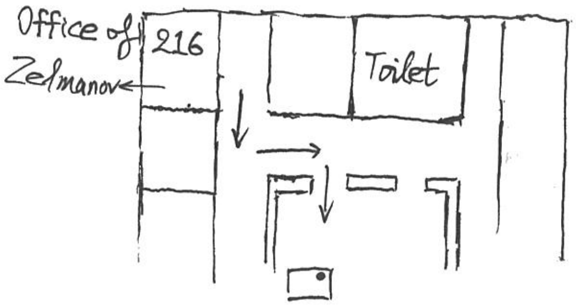
甘　2024.9.19

课前说明:

1. 本课程不设置考勤，同学可以自主选择时段上习题课，但是作业需交给规定的助教.

2. 作业提交截止时间为周三19:00，也请不要早于当周周四中午12:00. 若无特殊情况，迟交作零处理.

3. 欢迎大家线下答疑，我的工位在 南科大国际数学中心(台州楼2楼)



为避免大家跑空，请提前告知我答疑时间.(尽管大部分时间我都在工位)

4. 尽量交纸质版作业，方便助教批阅。若实在是要交电子版作业，请提交PDF格式.(我的邮箱: 12432017@mail.sustech.edu.cn)

5. 习题课的讲义(手写)会于习题课后公布于我的个人主页上 Teaching 区域. (huangbinhe101.github.io)

6. 若在课堂上有任何逻辑，思路，计算上的错误，允许用恶狠严厉的语言顶撞老师.(笔误除外)

本节课主要内容:

- 域(数域) → 子域, 扩域
- 连加符号 Σ → 哑指标, 换序求和
- 连乘符号 Π

定义1.(封闭性) 如果数集P有一运算,且P中数做运算的结果仍在P中,则称P对于这个运算是封闭的.

例2. 考虑复数全体构成的集合 $\mathbb{C}$,为强调其对于通常意义下的加,减,乘除(非0)封闭,我们称其为复数域.同理,称 $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$) 为有理数域(实数域)

定义3. 若K是 $\mathbb{C}$ 的子集,K包含0,1,并且K对于加减乘除四则运算封闭,则我们称K是 $\mathbb{C}$ 的子域.如果L也是 $\mathbb{C}$ 的子域,并且K也是L的子集,那么我们说L是K(在 $\mathbb{C}$ 中)的一个扩域,也称K是L(在 $\mathbb{C}$ 中)的一个子域.

例4. 记 $\mathbb{Q}(i)=\{a+bi: a,b\in\mathbb{Q}\}$. i为虚数单位.则 $\mathbb{Q}(i)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域.

证: 1. $\mathbb{C}=\{a+bi: a,b\in\mathbb{R}\}\supset\{a+bi: a,b\in\mathbb{Q}\}=\mathbb{Q}(i)$

2. $0=0+0\cdot i\in\mathbb{Q}(i)$ 且 $1=1+0\cdot i\in\mathbb{Q}(i)$

3. $\forall q_1,q_2\in\mathbb{Q}(i)$,不妨设 $q_1=a_1+b_1i$, $q_2=a_2+b_2i$,其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}$.

① $q_1\pm q_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\cdot i$,由于 $\mathbb{Q}$ 对于加减封闭, $q_1\pm q_2\in\mathbb{Q}(i)$

② $q_1q_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\cdot i$,由于 $\mathbb{Q}$ 对于加减乘封闭 $q_1\cdot q_2\in\mathbb{Q}(i)$

③ 令 $q_2\neq 0$,即 $a_2^2+b_2^2\neq 0$.则 $\frac{q_1}{q_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2\cdot i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$

$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot i$,由于 $\mathbb{Q}$ 对于加减乘除封闭

$\frac{q_1}{q_2}\in\mathbb{Q}(i)$

由①②③知, $\mathbb{Q}(i)$ 对加减乘除四则运算封闭

综上, $\mathbb{Q}(i)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域.

命题5. 复数域 $\mathbb{C}$ 的任何子域都是有理域 $\mathbb{Q}$ 的扩域.

证: 任何子域均包含0,1两个元素,而任意有理数均可用0,1经过加减乘除有限次运算得到,故 $\mathbb{Q}\subset$ 任何子域.

• 若有一些数被以下标的形式标记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 那么我们可以记

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

事实上，该求和式的值与字母 i 的选取无关. 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$ ，因此称 i 为哑指标

我们可以考虑映射 $a: [\![1,n]\!] \longrightarrow \mathbb{C}: i \longmapsto a(i) := a_i$ 并且若 $I \subset [\![1,n]\!]$，我们可以只选取下标在 I 中的数 a_i 求和. 记为 $\sum_{i\in I} a_i$. 若 $I=\phi$, 约定 $\sum_{i\in\phi} a_i = 0$.

• 下面我们开始定义指标非数的求和.

如果 K 是一个有限集，而 $s: K \to [\![1,n]\!]$ 是已给的映射. 那么记号 $\sum_{k\in K} a_{s(k)}$ 可表示选自 $a_1, \cdots, a_n$ 的 $|K|$ 个数的求和（可重复）

命题6. 对任意双射 $\sigma: [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$，有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$.

证：我们对 n 进行归纳法.

当 $n=1$ 时. $a_1 = a_1$ 显然成立.

假设对于 n，结论成立. 考虑双射 $\sigma: [\![1,n+1]\!] \longrightarrow [\![1,n+1]\!]$.

则存在唯一 $k \in [\![1,n+1]\!]$, s.t. $\sigma(k) = n+1$. 定义映射 $\sigma': [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i), & 1 \le i < k \\ \sigma(i+1), & k \le i \le n \end{cases}$$

易证 σ' 是 $[\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ 的双射，因此

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} &= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma(i)} + a_{\sigma(k)} + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_{\sigma(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma'(i)} + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_{\sigma'(i-1)} + a_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_{\sigma'(i)} + \sum_{i=k}^{n} a_{\sigma'(i)} + a_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma'(i)} + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i
\end{aligned}$$

故命题得证.

推论7. 假设有 mn 个数 a_{ij} 其中 $i\in\{1,\cdots,m\}$, $j\in\{1,\cdots,n\}$ 那么

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

证：这 mn 个数可写成以下形式

法I.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

前者求和是先求行的和，再求所有行的和的和

后者求和是先求列的和，再求所有列的和的和

两者均是所有数的和，只是顺序不一样，而 $\mathbb{C}$ 中的加法有交换律，所以两者相等.

法II. 令 $b:[\![1,mn]\!]\longrightarrow\mathbb{C}:(i-1)n+j\longmapsto a_{ij}$, $i\in[\![1,m]\!]$, $j\in[\![1,n]\!]$.

则 $\sum_{i=1}^{mn}b_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$.

构造 $\sigma:[\![1,mn]\!]\longrightarrow[\![1,mn]\!]:(i-1)n+j\longmapsto(j-1)m+i$, $i\in[\![1,m]\!]$, $j\in[\![1,n]\!]$

易证 σ 是一个双射. 所以由命题6,

$$\sum_{i=1}^{mn}b_i=\sum_{i=1}^{mn}b_{\sigma(i)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

故命题得证.

- 与连加符号 Σ 类似，我们可以定义连乘符号 Π

下面只列出其相关性质，证明与上述两证明类似

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}a_i\cdot b_j=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{j=1}^{m}b_j\right)\qquad\prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i)=\lambda^n\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i$$

注8. 在 nm 为无限时，(求和项无限时) 以上结论往往不对. 比如 $S=1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

高代习题课 HW1

甘　　2024.9.24

Part I. 习题讲解.

A.5.8. $\forall x\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}$，　$x\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\Rightarrow\exists k\in\mathbb{Z}$ s.t. $x=\frac{k}{2}$

$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{k}{2}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow k$ 为奇数 $\Rightarrow\exists l\in\mathbb{Z}$, s.t. $k=2l+1$.

$\Rightarrow x=\frac{2l+1}{2}=l+\frac{1}{2}$，$l\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$

$\forall x\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$，　$\exists m\in\mathbb{Z}$, s.t. $x=\frac{1}{2}+m=\frac{1+2m}{2}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$

若 x 为整数，则 $\frac{1}{2}$ 为整数，故矛盾.

$\Rightarrow x\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}=\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$

A.5.9. 对任意 $x\in X$, $y\in Y$,

若 $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，则 $(x\in A$ 且 $x\in B)$ 且 $(y\in C$ 且 $y\in D)$

即 $(x\in A$ 且 $y\in C)$ 且 $(x\in B$ 且 $y\in D)$

即 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$

反过来，若 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，只需将上述过程倒过来写即可证明．$(A\times C)\cap(B\times D)\subset(A\cap B)\times(C\cap D)$

综上，两集合相等.

A.5.10 1. 正确

2. 不正确：考虑 $X=\{1,2,3\}$，$A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=\{1,3\}$

则 $(A\cap B)\cup C=\phi\cup\{1,3\}=\{1,3\}$

而 $A\cap(B\cup C)=\{1\}\cap\{1,2,3\}=\{1\}$

3. 正确.

A.5.12. $\#\mathcal{P}(X) = 2^{|X|}$

A.5.14. 定义映射 $\sigma_Q : X \to \{0,1\}$, $\sigma_Q(x) = \begin{cases} 0, & x \notin Q \\ 1, & x \in Q \end{cases}$ 示性函数

对于 $Q \in \mathcal{P}(X)$ 事实上, $\sigma_Q \in Map(X, \{0,1\})$. 所以我们可以

定义 $\sigma : \mathcal{P}(X) \to Map(X, \{0,1\}) : Q \mapsto \sigma_Q$

下验证其为双射

1. 单射: 若 $\sigma_Q = \sigma_P$, 其中 $Q, P \in \mathcal{P}(X)$,

$\forall x \in Q$, $\sigma_P(x) = \sigma_Q(x) = 1 \Rightarrow x \in P$

$\forall x \in P$, $\sigma_Q(x) = \sigma_P(x) = 1 \Rightarrow x \in Q$

$\Rightarrow Q = P$

2. 满射: 对任意 $\alpha \in Map(X, \{0,1\})$, 考虑集合

$N = \{x \in X : \alpha(x) = 1\}$, $M = \{x \in X : \alpha(x) = 0\}$

M, N 为 X 的子集 $\Rightarrow N \in \mathcal{P}(X)$. 且 $N \cup M = X$

$(\sigma_N - \alpha)(x) = \begin{cases} 1-1=0 & x \in N \\ 0-0=0 & x \in M \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma_N = \alpha$

A.5.17.

1. f, g 为单射. $g \circ f : X \to Z$, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若有

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. 由 g 为单射, $f(x_1) = f(x_2)$.

又有 f 为单射, 于是 $x_1 = x_2$. 故 $g \circ f$ 为单射.

2. ~~$g \circ f$ 的陪域为 $g(f(X))$, 对任意~~

对任意 $z \in Z$, 由 g 是满射, $\exists y \in Y$, s.t. $g(y) = z$.

又由 f 是满射, $\exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$, 即 $g(f(x)) = g \circ f(x) = z$

故 $g \circ f$ 为满射.

3. 由 1, 2 可知, 若 f, g 为双射, 则 $g \circ f$ 是双射.

$(f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f) = 1_X$, $\cancel{(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_Z}$ $\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

A.5.18. 1. 不正确：$f:\{1\}\to\mathbb{Z}$，$g:\mathbb{Z}\to\{1\}$，其中 $f(1)=1$

则 $g\circ f:\{1\}\to\{1\}$ 是单射且是满射

而 f 不满且 g 不单

2. 不正确：反例如上.

3. 不正确：反例如上.

A.5.24. $f\circ i(x)=f(x)=\sin\pi x=0\quad\forall x\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow g=f\circ i$

A.5.26. ① $\forall x\in X$，$g(x)=x^3=x$. 所以有

$f\circ g=f$，故图交换

②

$$\{1,-1\}\xrightarrow{f}\{1\}$$

$$\{0\}\longrightarrow\{0\}$$

$g_1=id_X$，$g_2:\begin{array}{l}1\mapsto 1\\-1\mapsto 1\\0\mapsto 0\end{array}$ $\quad g_3:\begin{array}{l}1\mapsto -1\\-1\mapsto 1\\0\mapsto 0\end{array}$ $\quad g_4:\begin{array}{l}1\mapsto -1\\-1\mapsto -1\\0\mapsto 0\end{array}$

Part II. 补充内容

Peano Axioms: Start at the Beginning.

- Peano (1852-1932) from Italy. A mathematician and glottologist.

1) Peano Axioms: 1889

a formal foundation for the collection of natural numbers

2) Peano Curve: 1890

the first example of space filling curve.

Hook: The Secret Number (《隐匿的数字》):

"There is a number between 3 & 4."

- "Charactoristic" of the natural numbers:

  ① with a start number
  ② successive increment
  ③ not wrap-around

- IMPORTANT! Set aside, for the moment, everything you know about the natural numbers, Forget how to count, to add, to multiply.
- Two foundamental concepts: 0 and increment operation (successor operation)

Axiom 1. 0 is a natural number.

Axiom 2. If n is a natural number, then $n{+}{+}$ is also a natural number.

Axiom 3. 0 is not the successor of any natural number.

Axiom 4. Different natural numbers must have different successors.

Axiom 5. (Principle of mathematical induction). Let $P(n)$ be any property pertaining to a natural number n. Suppose $P(0)$ is true, and suppose that whenever $P(n)$ is true, $P(n{+}{+})$ is also true. Then $P(n)$ is true for every natural number n.

- There is a number system $\mathbb{N}$, whose elements we will call natural numbers, for which Axioms 1-5 are true.

- Denote $0{+}{+}$ by 1, $1{+}{+}$ by 2, $\cdots$. Then $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

Exercise. Prove

1) 3 is a natural number 2) $4 \neq 0$ 3) $6 \neq 2$.

Refences: 1. Analysis I by Terence Tao, chapter 2
2. 陶哲轩的实分析，第2章.

高代习题课 HW2 & 3.

甘 2024.10.10

A.5.19.

$f(A)=\{a,b\}$, $f^{-1}(B)=\{2,3,4\}$

$f^{-1}(f(A))=\{1,2,3\}$. $f(f^{-1}(B))=\{b,c\}$

A.5.20. ① $\forall z\in Z$

$z\in(g\circ f)(A) \Leftrightarrow \exists x\in A$, s.t. $(g\circ f)(x)=z$

$\Leftrightarrow \exists x\in A$, s.t. $g(f(x))=z$

$\Leftrightarrow \exists b\in f(A)$ s.t. $g(b)=z$

$\Leftrightarrow z\in g(f(A))$

② $\forall x\in X$,

$x\in(g\circ f)^{-1}(C) \Leftrightarrow g\circ f(x)\in C$

$\Leftrightarrow g(f(x))\in C$

$\left(\Leftrightarrow \exists \underbrace{b}_{=f(x)} \in f(X)\text{, s.t. } g(b)\in C\right)$

$\Leftrightarrow f(x)\in g^{-1}(C)$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(g^{-1}(C))$

A.5.21. 1. • $\forall a\in A$, $f(a)\in f(A) \Rightarrow a\in f^{-1}(f(A))$, 故 $f^{-1}(f(A))\supseteq A$

• $\forall a'\in f(f^{-1}(A'))$, 存在 $x\in f^{-1}(A')$, s.t. $a'=f(x)$.

由于 $x\in f^{-1}(A')$ → ~~此时~~ 存在 $a''\in A'$ 使得 $f(x)=a''$,

故 $a'=a''\in A'$. 因此 $f(f^{-1}(A'))\subseteq A'$

• 令 $X=Y=\{0,1\}$. $A=A'=\{0\}$. 取 $f: X\to Y$, $f(x)=1$, $\forall x\in X$.

则 $f^{-1}(f(A))=f^{-1}(1)=X\neq A$, $f(f^{-1}(A'))=f(\phi)=\phi\neq A'$

2. $\forall x\in X$,

$x\in f^{-1}(A'\cap B') \Leftrightarrow f(x)\in A'\cap B'$.

$\Leftrightarrow f(x)\in A'$ 且 $f(x)\in B'$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A')$ 且 $x\in f^{-1}(B')$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')$

$x\in f^{-1}(A'\cup B') \Leftrightarrow f(x)\in A'\cup B'$

$\Leftrightarrow f(x)\in A'$ 或 $f(x)\in B'$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A')$ 或 $x\in f^{-1}(B')$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$

3. • $\forall y\in Y$, $y\in f(A\cap B) \Leftrightarrow \exists x\in A\cap B$. s.t. $f(x)=y$.

$\Rightarrow \exists x\in A$ s.t. $f(x)=y$ 且 $\exists x\in B$ s.t. $f(x)=y$

$\Leftrightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\cap f(B)$

• 取 $X=Y=\{0,1\}$, $f: X\to Y$, $f(0)=f(1)=0$.
令 $A=\{0\}$, $B=\{1\}$. 则
$f(A\cap B)=f(\phi)=\phi$. $f(A)\cap f(B)=\{0\}$

• $\forall y\in Y$. $y\in f(A\cup B) \Leftrightarrow \exists x\in A\cup B$, s.t. $f(x)=y$

$\Leftrightarrow \exists x\in A$, s.t. $f(x)=y$ 或 $\exists x\in B$ s.t. $f(x)=y$

$\Leftrightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$

A.5.22. 若f是满射, 我们只需证明 $\forall B\subseteq Y$, $f(f^{-1}(B))\supseteq B$.
$\forall b\in B$, 由于f是$X\to Y$的满射, $\exists x_0\in X$, s.t. $f(x_0)=b$.
故 $x_0\in f^{-1}(B)$. 因此 $b=f(x_0)\in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow B\subseteq f(f^{-1}(B))$
反过来, $\forall y\in Y$, 取 $B=\{y\}$ 单点集, 则 $f^{-1}(B)\neq\phi$. 故 $\exists x\in X$ s.t. $f(x)=y$. 故满.

A.5.28. (i)⇒(ii)：若 $g_1, g_2 : Z \to X$ s.t. 图交换.

则 $h = f\circ g_1 = f\circ g_2$. 即

$\forall z \in Z$，$f(g_1(z)) = f(g_2(z)) = h(z)$

由 f 单射，$g_1(z) = g_2(z)$. $\forall z\in Z$

故 $g_1 = g_2$

(ii)⇒(i)：若 $\exists x_1, x_2 \in X$ s.t. $f(x_1) = f(x_2) = y_0 \in Y$.

取 $h: Z \to Y$ 满足 $\forall z\in Z, h(z) = y_0$

此时，考虑 $g_1 : Z \to X$ 满足 $\forall z\in Z, g_1(z) = x_1$

$g_2 : Z \to X$ 满足 $\forall z\in Z, g_2(z) = x_2$.

易证 $f\circ g_1 = f\circ g_2 = h$.

由(ii)，$g_1 = g_2$ 故 $x_1 = x_2$.

A.5.29.

1. 若 $F(x_1) = F(x_2)$，即 $(x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2))$

故 $x_1 = x_2$ ⇒ F 单

2. $\forall y \in Y$，由 X 非空，$\exists x_0 \in X$. 故 $(x_0, y) \in X\times Y$.

此时，$p((x_0, y)) = y$. ⇒ p 满

3. $\forall x \in X$，$p\circ F(x) = p(F(x)) = p(x, f(x)) = f(x)$

故 $p\circ F = f$.

1.1.1 (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_1]{L_1\to L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\to 2L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3\to L_3-L_1 \\ L_4\to L_4-L_1}]{L_2\to L_2-3L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4\to L_4-L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4\to L_4+2L_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

故解得 $x_4 = -\frac{4}{3}$，$x_3 = \frac{5}{3}$. $x_2 = 2$，$x_1 = 0$

思考题 A.3.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"'] & Z' \arrow[d, "\gamma"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

(映射复合满足结合律)

$$\begin{aligned}\gamma\circ(g'\circ f') &= (\gamma\circ g')\circ f' \\ &= (g\circ\beta)\circ f' \\ &= g\circ(\beta\circ f') \\ &= g\circ(f\circ\alpha) \\ &= (g\circ f)\circ\alpha\end{aligned}$$

思考题 A.4

① 取 $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $f_1(x)=2^x$. 令 $g_1(x)=\log_2 x$. 易证 $g_1\circ f_1(x)=x$

但 f_1 不满, 故无右逆

② 取 $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $f_2(x)=\begin{cases}\log_2|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

令 $g_2(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -2^x, & x<0\end{cases}$, 则 $f_2\circ g_2(x)=\begin{cases}2^{\log_2|x|}=x & x>0\\ 0 & x=0\\ -2^{\log_2|x|}=x & x<0\end{cases}$.

故 g_2 是 f_2 的右逆, 但 f_2 不单, 故无左逆.

1.1.1.(2) $\begin{pmatrix}1&2&0&-3&2&1\\1&-1&-3&1&-3&2\\2&-3&4&-5&2&7\\9&-9&6&-16&2&25\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4\to L_4-9L_1]{L_2\to L_2-L_1,\ L_3\to L_3-2L_1} \begin{pmatrix}1&2&0&-3&2&1\\0&-3&-3&4&-5&1\\0&-7&4&1&-2&5\\0&-27&6&11&-16&16\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[L_4\to L_4-9L_2]{L_3\to 3L_3-7L_2} \begin{pmatrix}1&2&0&-3&2&1\\0&-3&-3&4&-5&1\\0&0&33&-25&29&8\\0&0&33&-25&29&7\end{pmatrix} \xrightarrow{L_4\to L_4-L_3} \begin{pmatrix}1&2&0&-3&2&1\\0&-3&-3&4&-5&1\\0&0&33&-25&29&8\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$

故无解.

1.1.3

必要性：设非零解为 $x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$. 则有

$$\begin{cases} x_1^0 a_{11} + x_2^0 a_{12} = 0 \\ x_1^0 a_{21} + x_2^0 a_{22} = 0 \end{cases}$$

，其中 x_1^0, x_2^0 不同为零.

不妨设 $x_1^0 \neq 0$，则

$$a_{11} = -\frac{x_2^0}{x_1} a_{12}, \quad a_{21} = -\frac{x_2^0}{x_1^0} a_{22}$$

此时，

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\frac{x_2^0}{x_1}(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) = 0$$

若 $x_1^0=0$，则 $x_2^0 \neq 0$. 此时 $x_2^0 a_{12} = x_2^0 a_{22} = 0$.

$$\Rightarrow a_{12} = a_{22} = 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

充分性：

若 a_{ij} 均为零，显然 x_1, x_2 可为任意值，故有非零解.

若存在一个 a_{ij} 不为零. 不失一般性，我们令 $a_{11} \neq 0$.

用高斯消元法，方程组等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} x_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1$，则有 $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$，故有非零解.

1.1.4. (4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 10 & -7 & 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 13 & -5 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_4 - 5x_5 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -8x_5 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

故有非零解.

1.1.6.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -10 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -14 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故这三条直线有唯一交点.

2. l_4: $-10y=-3$，则 l_1, l_2, l_4 构成的增广矩阵为

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

故无解.

1.1.8.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 1-\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & a & a+2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -6a+2 & 0 \end{pmatrix}$ 故取 $a=\frac{1}{3}$ 时，

方程有非零解. 令 $z=s$，则 $y=-7s$，$x=3s$. $s\in\mathbb{R}$.

故解为 $(3s, -7s, s)$, $s\in\mathbb{R}$.

1.1.9. (2)

$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 & ① \\ x_1+bx_2+x_3=3 & ② \\ x_1+2bx_2+x_3=4 & ③ \end{cases}$

③−② 得，$bx_2=1$.

②−① 得

方程组 $\begin{cases} x_3+x_2+ax_1=4 \\ x_3+bx_2+x_1=3 \\ x_3+2bx_2+x_1=4 \end{cases}$ 的

增广矩阵为

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & -1 & 1-a & -2 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & b(1-a) & 1-2b \end{pmatrix}$

1° 当 $b=0$ 时，方程无解

2° 当 $b=\frac{1}{2}$ 时，方程组一定有非零解. 若 $a\neq 1$，

此时有唯一解 $(x_1, x_2, x_3)=(0, 2, 2)$

若 $a=1$，则有无穷个解. $(x_1, x_2, x_3)=(s, 2, 2-s)$, $s\in\mathbb{R}$

3° 当 $b\neq 0$ 且 $\neq \frac{1}{2}$ 时，若 $a=1$，则方程组无解.

若 $a\neq 1$，则有唯一解 $(x_1, x_2, x_3)=\left(\frac{1-2b}{b(1-a)}, \frac{1}{b}, \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}\right)$

综上，当 $(a,b)\in \mathbb{R}\setminus\{1\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\cup\{(1,\frac{1}{2})\}$ 时，方程组有非零解. 解如上.

1.1.10 方程组的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & & & & 1 & a_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \to L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & 1 & -1 & & a_3 \\ & & & 1 & -1 & a_4 \\ & & & & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}$$

故 $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0 \Leftrightarrow$ 方程组有解. 若满足，令 $x_5 = s$, 则有

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a_1+a_2+a_3+a_4+s,\ a_2+a_3+a_4+s,\ a_3+a_4+s,\ a_4+s,\ s),\ s \in \mathbb{R}.$$

1.1.11. 方程组系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_n \to \sum_{i=1}^{n-1} L_i \cdot (-1)^{i+1} + L_n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1+(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

故齐次方程组有非零解，当且仅当 n 为偶数. 此时通解为

$$x_i = (-1)^i s,\quad i=1,2,\cdots,n. \text{ 其中 } s \text{ 为任意实数}.$$

1.1.13. 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 则 x_{ij} 可取任意值，均为解.

若 a_i 不全为零，不妨设 $a_1,\cdots,a_r$ 不为零，$a_{r+1}=\cdots=a_n=0$.

此时 $\forall 1\le i,j,k,l \le r$, 有 $\dfrac{x_{il}}{a_i a_l} = \dfrac{x_{kj}}{a_k a_j}$. 由于 $r \ge 1$, a_1 一定非零.

令 $\dfrac{x_{11}}{a_1 a_1} = c$, c 为任意实数，则有 $x_{il} = a_i a_l c$, $\forall\, i,l \in \{1,\cdots,r\}$.

若 i, l 中有一个大于 r, 则 $a_i=0$ 或 $a_l=0$.

$$a_1^2 x_{il} = a_i a_l x_{11} = 0 \Rightarrow x_{il} = 0 = a_i a_l \cdot c$$

因此，有 $x_{il} = a_i a_l \cdot c$. $\forall 1 \le i, l \le n$

同时，易知上述 x_{il} 满足方程组，故为方程组通解.

高代习题课 HW5

甘 2024.10.16

PART I. 错题解析

- 证明：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \Leftrightarrow$ 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0 \end{cases}$ 有非零解.

证明1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow[\times]{L_2 \to a_{12}L_1-a_{11}L_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}) \end{pmatrix}$

初等行变换：(本质是可逆)
1. 交换两行
2. 某一行乘非零常数
3. 将某行乘常数加到另一行.

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，则原方程组与 $a_{11}x_1+a_{12}x_2=0$ 等价

故必有非零解.

若方程组有非零解，则存在 $x_2^0\neq 0$，s.t. 方程成立. 此时有，

非零解是非零向量，不保证某一变量不为零

$$(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2^0=0 \Rightarrow a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=0$$

证明2. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{a_{12}L_1-a_{11}L_2} (a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=0$

同理有 $(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_1=0$

若方程组有非零解，则有不全为零的 (x_1,x_2) s.t. 上述两方程成立.

故有 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，当 a_{ij} 均为0. 易知方程有非零解.

当 a_{ij} 不全为0时，不妨令 a_{11} 不为0.

则有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to a_{12}L_1-a_{11}L_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22} \end{pmatrix}$$

此时，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$，故方程组有非零解

综上 方程组有非零解 等价于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$.

• 求解方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to aL_3 - L_1]{L_2 \to aL_2 - L_1} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & ab-1 & a-1 & 3a-4 \\ 0 & 2ab-1 & a-1 & 4a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ & ab-1 & a-1 & 3a-4 \\ & ab & 0 & a \end{pmatrix}$$

不是初等行变换

$$\xrightarrow{L_2 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ & 1 & 1-a & 4-2a \\ & ab & & a \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - abL_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ & 1 & 1-a & 4-2a \\ & & ab(a-1) & a(2ab-4b+1) \end{pmatrix}$$

PART Ⅱ. 第五周习题

习题 1.2.3. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & ac+b^2+ca \\ c+b+a & ca+b^2+ac & c^2+b^2+a^2 \\ 3 & a+b+c & c+b+a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+ac+c & b+ba+c & c+a^2+c \\ a+bc+b & b+b^2+b & c+ba+b \\ a+c^2+a & b+cb+a & c+ac+a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b-ac & a^2+b^2+c^2-ba-b-c & 2ac+b^2-a^2-2c \\ c(1-b) & 2(ac-b) & a^2+b^2+c^2-b-c-ba \\ 3-2a-c^2 & c(1-b) & b-ac \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c & 3 \\ a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac & a+b+c \\ b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$A^TB^T = \begin{pmatrix} ac+a+c & bc+a+b & c^2+2a \\ ab+b+c & b^2+2b & bc+a+b \\ a^2+2c & ab+b+c & ac+a+c \end{pmatrix}$$

习题 1.2.5. 证明：①A, B上三角，则 AB上三角. ②AB严格上三角，则 AB严格上三角

证. ①考虑矩阵AB中 i,j 号元素 $i>j$

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}A_{ik}B_{kj}+\sum_{k=i}^{n}A_{ik}B_{kj}$$

第一项中 $A_{ik}=0$ ($i>k$, A上三角)，第二项中 $B_{kj}=0$ ($k\geq i>j$, B上三角)

故 $(AB)_{ij}=0\ \forall i>j$，即AB上三角

② 将条件改为 $i\geq j$，类似讨论即可

习题 1.2.7 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ a & 0 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，a取何值时，存在三阶矩阵 $B\neq 0$，使得 $AB=0$.
并具体给出一个这样的B.

解. 问题等价于 a为何值时方程组 $AX=0$ 有非零解.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ a & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{L_2\to L_2-2L_1\\ L_3\to L_3-aL_1}]{L_1\to -L_1,}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 3a-1\end{pmatrix}$$

故，当 $3a-1=0$，即 $a=\frac{1}{3}$ 时，方程组有非零解.

其中一个非零解为 $(3,-7,1)^T$.

故 $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -7 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

习题 1.2.8. 计算 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}^n$，$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n$

归纳法可解得 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ & 1\end{pmatrix}$

并且 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos(n\theta)\end{pmatrix}$

习题 1.2.9. 证明：$A+A^T$，AA^T，A^TA 都是对称阵，
$A-A^T$ 反对称阵.

证.
$$(A+A^T)^T=A^T+A=A+A^T$$
$$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$$
$$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$$
$$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$$

习题 1.2.16. $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 λ_i 两两不同.
证明：与D可交换的，均为对角阵.

证. 假设 $A=(a_{ij})$ 与 D 可交换. 即 $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$
$$(AD)_{ij}=a_{ij}\lambda_j=(DA)_{ij}=\lambda_i a_{ij}$$
当 $i\neq j$ 时，$(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}=0 \Rightarrow a_{ij}=0$

故 A 为对角阵.

习题 1.2.17.

A跟所有对角阵可交换，由1.2.16 故A为对角阵

令 $A=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$
$$AE_{ij}-E_{ij}A=\lambda_iE_{ij}-\lambda_jE_{ij}=0$$
$$\Rightarrow \lambda_i=\lambda_j \quad \forall i,j$$
$$\Rightarrow A=\lambda I_n$$

习题 1.2.18. A, B 为方阵，下列命题是否成立.

1. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
2. 若 $AB=B$ 且 B 非零，则 $A=I_n$
3. A, B, $A+B$ 均可逆，则 I_n+BA^{-1} 也可逆，逆矩阵为 $A(A+B)^{-1}$

证.

1. 不一定成立. 反例：$n=2$. $A=\begin{pmatrix} & 1\\ & \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$.
$$(A+B)^2=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$$
$$A^2+2AB+B^2=0+2\begin{pmatrix}1 & \\ & \end{pmatrix}+0=\begin{pmatrix}2 & \\ & 0\end{pmatrix}$$

2. 不一定成立. 反例：$\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}\neq I_2$

3. $I_n+BA^{-1}=AA^{-1}+BA^{-1}=(A+B)A^{-1}=(A(A+B)^{-1})^{-1}$

习题 1.2.19. 若 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵，$A^2=0$，则 $A=0$.

证：令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，考虑 A^2 的 (k,k) 元素，则有 $\sum_{i=1}^n a_{ki}a_{ik}=\sum_{i=1}^n a_{ki}^2=0$
$$\Rightarrow \forall i,k,\ a_{ki}=0 \Rightarrow A=0$$

习题 1.2.21.

1. 令 $n=\min\{m: A^m=0, m\geq 0\}$.

1° 若 $n=0$，则 $A=0$，显然成立

2° 若 $n\neq 0$，则 $A^{n-1}\neq 0$，则 $\exists\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ s.t. $A^{n-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\neq 0$.

且 $A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$，故方程组有非零解

证.

2. 令 $S_1:=\{x\in\mathbb{R}^2: Ax=0\}$

先研究 S_1 的结构：
若 $x\in S_1$，则 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$A(\lambda x)=\lambda Ax=0$
故 $\lambda x\in S_1$.
若 $x_1, x_2\in S_1$，则 $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=0$
故 $x_1+x_2\in S_1$.

以下分情况考虑.

若 $S_1=\mathbb{R}^2$，则 $A=0$，故 $A^2=0$.

若 $\exists x_1\in\mathbb{R}^2$, s.t. $S_1=\{\lambda x_1:\lambda\in\mathbb{R}\}$,

取 $x_2\in\mathbb{R}^2$ 且 $x_2\notin S_1$，则 $y_2:=Ax_2\neq 0$.

y_2 可写成 x_1, x_2 的 $\mathbb{R}$-线性组合，即 $y_2=k_1x_1+k_2x_2$, $k_1, k_2\in\mathbb{R}$.

现有 $A^m x_2 = A^{m-1}(k_1x_1+k_2x_2) = k_2A^{m-1}x_2 \Rightarrow A^m x_2 = k_2^{m-1}k_1x_1+k_2^m x_2$ *

由于 $A^m=0$, $A^m x_2=0$，即 $k_2, \cancel{k_1}=0$，即 $y_2=k_1x_1$.

此时，$\forall x\in\mathbb{R}^2$, $x=a_1x_1+a_2x_2$, $a_1, a_2\in\mathbb{R}$,

$$A^2x = A^2(a_1x_1+a_2x_2) = a_2Ay_2 = a_2k_1Ax_1 = 0.$$

故 $A^2=0$.

若 $S_1=\{0\}$ 下证此情况不满足题意.

对任意 $x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$，$Ax\neq 0$ $(S_1=\{0\})\Rightarrow A^n x\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$

特别地 $A^m x\neq 0$. 故与 $A^m=0$ 矛盾!

综上，~~A~~ 若存在 $m\in\mathbb{N}$, s.t. $A^m=0$，则 $A^2=0$.

证. 由(1)知，$A=\begin{pmatrix}a & b\\ \lambda a & \lambda b\end{pmatrix}$，$\lambda\in\mathbb{R}$.

故 $A^m = \begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}(a\ b)\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}(a,b)\cdots\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}(a,b)$

$=\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}(a+\lambda b)^{m-1}(a\ b) = (a+\lambda b)^{m-1}A$

$=0$

$\Rightarrow A=0$ 或 $a+\lambda b=0$.

$\Rightarrow A^2=0$

高代习题课 HW6

廿 2024.10.31

思考题 1.3. $A=\begin{pmatrix}1&\\&\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}&\\&1\end{pmatrix}$, 证明 A,B 相抵, 但行、列不等价.

证: $A=\begin{pmatrix}1&\\&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\\1&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}$

A 做行变换之后, 第2列仍为0.

A 做列变换之后, 第2行仍为0.

故 A,B 行、列均不等价.

思考题 1.4. A 为 n 阶方阵, 则下列条件等价:

(i) A 可逆 (ii) A 行等价于单位阵 (iii) A 列等价于 I_n, (iv) A 与 I_n 相抵

证: (i) $\Rightarrow$ (ii) A 可逆, 则 A^{-1} 可逆. 故 A^{-1} 可写成有限多个初等矩阵的乘积.

即 $A^{-1}=P_1\cdots P_m$

于是 $A^{-1}A=P_1\cdots P_m A=I_n \Rightarrow A$ 行等价于 I_n

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 若 $\exists$ 初等矩阵 $\{P_i\}_{i=1}^m$, 使 $P_1\cdots P_m A=I_n$

则 $I_n=P_m^{-1}\cdots P_1^{-1}I_nP_1P_2\cdots P_m=P_m^{-1}\cdots P_1^{-1}P_1\cdots P_m A P_1\cdots P_m$

$=AP_1P_2\cdots P_m$

故 A 列等价于 I_n

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 显然

(iv) $\Rightarrow$ (i) 若 $PAQ=I_n$, 其中 P,Q 均可逆, 则 $A=P^{-1}Q^{-1}$ 亦可逆

习题 1.2.11. 设 $J=\begin{pmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{pmatrix}$

1) 若 $f(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0\in K[X]$. 计算 $f(J)$

2) 求出 $M_3(K)$ 中, 对所有 $g\in K[X]$, A, $g(J)$ 均可交换的矩阵 A.

3) 是否存在 $B\in M_3(K)$, 使 $BX=0$ 的解集恰为 J 的列空间.

解: 1) $J=E_{12}+E_{23}$, $J^2=E_{13}$, $J^3=0 \Rightarrow f(J)=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\&a_0&a_1\\&&a_0\end{pmatrix}$

2) 特别地, 取 $g(x)=x$, A 与 J 可交换. 反过来, 若 A 与 J 可交换

则 $AJ^n=J^nA$，$\forall n\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$，即 $Ag(J)=g(J)A$，$\forall g\in K[x]$：

故 A 与 $g(J)$ 可交换，$\forall g\in K[x] \Leftrightarrow A$ 与 J 可交换.

令 $A=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}E_{ij}$，$AJ-JA=\begin{pmatrix}-a_{21} & a_{11}-a_{22} & a_{12}-a_{23}\\ -a_{31} & a_{21}-a_{32} & a_{22}-a_{33}\\ & a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow a_{21}=a_{31}=a_{32}=0$，$a_{11}=a_{22}=a_{33}$ 且 $a_{12}=a_{23}$

即 $A=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & k_3\\ 0 & k_1 & k_2\\ 0 & 0 & k_1\end{pmatrix}$，$k_1, k_2, k_3\in K$.

3. 由题，$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$ 令 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & b_1\\ 0 & 0 & b_2\\ 0 & 0 & b_3\end{pmatrix}$

设 $BX=0 \Leftrightarrow \begin{cases}b_1x_3=0\\ b_2x_3=0\\ b_3x_3=0\end{cases}$

由于 x_3 只能等于 0，b_1, b_2, b_3 中必有一个不为 0.

故 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 即为一个方阵，满足要求.

1.2.22. 举例：$\exists A\in M_2(\mathbb{Z})$ 使，

1) $A\neq\pm I_2$ 但 $A^2=I_2$

2) $A^2=-I_2$，3) $A\neq I_2$，但 $A^3=I_2$.

1). $A=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$　　2) $A=\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$　　3) $A=\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

1.2.24. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 15 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 计算 A^{-1}，并利用结果解方程组.

$$\begin{cases}x+3y+2z=b_1\\ 15x+2y=b_2\\ 4x+2y+z=b_3\end{cases}$$

解：$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 2 & 1 & & \\ 15 & 2 & 0 & & 1 & \\ 4 & 2 & 1 & & & 1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 2 & 1 & & \\ & -43 & -30 & -15 & 1 & \\ & -10 & -7 & -4 & & 1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 2 & 1 & & \\ & -3 & -2 & 1 & 1 & -4\\ & -10 & -7 & -4 & & 1\end{array}\right)$

$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4\\ & -3 & -2 & 1 & 1 & -4\\ & -1 & -1 & -7 & -3 & 13\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & & & 2 & 1 & -4\\ & -1 & & 15 & 7 & -30\\ & -1 & -1 & -7 & -3 & 13\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & & & 2 & 1 & -4\\ & 1 & & -15 & -7 & 30\\ & & 1 & 22 & 10 & -43\end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -15 & -7 & 30\\ 22 & 10 & -43\end{pmatrix}$，

方程组 $\Leftrightarrow AX=b$，$\Leftrightarrow X=A^{-1}b=\begin{pmatrix}2&1&-4\\-15&-7&30\\22&10&-43\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b_1+b_2-4b_3\\-15b_1-7b_2+30b_3\\22b_1+10b_2-43b_3\end{pmatrix}$

习题 1.2.29. $A\in M_n(K)$ 可逆，证明

1) 若 A 对称（反称），则 A^{-1} 也对称（反称）

2) A 上（下）三角，则 A^{-1} 也上（下）三角

证. 1) 若 $A=A^T$，则 $(A^{-1})^TA=(A^TA^{-1})^T=(AA^{-1})^T=I_n$

故 $(A^{-1})^T=A^{-1}\Rightarrow A^{-1}$ 对称

若 $A=-A^T$，则 $(A^{-1})^TA=(A^TA^{-1})^T=-I_n$

故 $(A^{-1})^T=-A^{-1}\Rightarrow A^{-1}$ 反称

2) 用数学归纳法证明：若 A 可逆上三角，则 A 对角线没有 0 且 A^{-1} 上三角．

当 $n=1$ 时，显然成立

当对于 n，结论成立时，考虑 $n+1$ 阶上三角可逆方阵 $A_{n+1}=\begin{pmatrix}A_n&b_n\\0&a_{n+1}\end{pmatrix}$，

其中 A_n 为 $n\times n$ 上三角方阵．b_n 为 $n\times1$ 矩阵．

令 $A_{n+1}^{-1}=\begin{pmatrix}B_n&C_n\\D_n&a'_{n+1}\end{pmatrix}$，由分块矩阵之乘法．

$$A_{n+1}^{-1}A_{n+1}=\begin{pmatrix}B_nA_n&B_nb_n+C_na_{n+1}\\D_nA_n&D_nb_n+a'_{n+1}a_{n+1}\end{pmatrix}=I_{n+1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B_nA_n=I_n &\cdots\cdots ①\\ D_nA_n=0 &\cdots\cdots ②\\ D_nb_n+a'_{n+1}a_{n+1}=1 &\cdots\cdots ③\end{cases}$$

① $\Rightarrow B_n=A_n^{-1}$，由归纳假设 B_n 为 n 阶上三角方阵且 A_n 对角线元不为 0．

令 $A_n=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ii}\neq0,\ \forall i$，$D_n=(d_1,\cdots,d_n)$．

则有 $a_{11}d_1=0$，$a_{21}d_1+a_{22}d_2=0$，$\cdots$，$\sum_{i=1}^n a_{ni}d_i=0$

故 $d_1=0$，$d_2=0$，$\cdots$，$d_n=0$．即 A_{n+1}^{-1} 上三角．

最后，③ $\Leftrightarrow a'_{n+1}a_{n+1}=1\Rightarrow a_{n+1}\neq0$，故 A_{n+1} 对角线元不为 0．

综上，对任意 $n\in\mathbb{N}$，若 A 可逆，A 为上三角，则 A^{-1} 上三角．

（下三角之情形可类似证明）

习题 1.2.30 证明：任意方阵都可以通过有限多个初等行变换化为对称阵。
(列类似)

证：$\forall A\in M_n(K)$，$\exists$ 可逆阵 P, Q s.t. $A = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$
$= P(Q^T)^{-1}Q^T\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$

由于 P, Q 可逆，$P(Q^T)^{-1}$ 亦可逆，故 A 可通过一系列初等行变换变成 $Q^T\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$，

且 $\left(Q^T\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q\right)^T = Q^T\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$ 对称！

习题 1.2.32 设 $A\in M_n(K)$，$A^m=0$，$m\in N^*$.
证明：I_n-A 可逆，并且存在次数小于 m 的首一多项式 f，s.t. $(I_n-A)^{-1}=f(A)$

证：$I_n = I_n - A^m = (I_n-A)(I_n+A+\cdots+A^{m-1})$

故 I_n-A 可逆，且 $(I_n-A)^{-1} = A^{m-1}+\cdots+A+I_n$

习题 1.2.42. 1) 分解 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 成有限多个二阶第三类初等矩阵的乘积、

2) $\lambda\neq 0$，分解 $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ --------- ---------

3) 证明：任何行列式等于 1 的二阶方阵都可分解成……

证：1)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda^{-1} \\ & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^{-1}(1-\lambda) & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ \lambda-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda^{-1} \\ & 1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \\ \lambda^{-1}(1-\lambda) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ \lambda-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda^{-1} \\ & 1\end{pmatrix}$$

3) 令 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(K)$，$\det A = ad-cb=1$.

① 若 $a\neq 0$，则 $A=\begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{cb}{a}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{c}{a} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ & \frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ & 1\end{pmatrix}$

由 2) $\begin{pmatrix} a & \\ & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$ 可分解. 故 A 可分解…

② 若 $a=0$，由 $\det A=1$，$c\neq 0$，$A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d+b \\ c & d\end{pmatrix}$

后者可分解. 故 A 可分解.

综上，任何行列式为 1 的二阶方阵均可分解成……

习题 1.2.49. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 1 & \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否行,列等价.

解: 做行变换:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 1 & \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 1 & \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

做列变换

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 1 & \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 A, B 行等价, 列不等价.

高等代数习题课 HW7

芏 2024.10.31

习题 1.2.54. $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{3}$，$A_{ij}\in M_n(K)$. 假设 A_{11} 可逆. 求 P, Q 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & B_{22} & B_{23} \\ & B_{32} & B_{33}\end{pmatrix}$$

解：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{pmatrix} I_n & & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_n & \\ -A_{31}A_{11}^{-1} & 0 & I_n\end{pmatrix}]{\text{右乘}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} \\ & A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{左乘}]{\begin{pmatrix} I_n & -A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{11}^{-1}A_{13} \\ & I_n & \\ & & I_n\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} \\ & A_{32}-A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{33}\end{pmatrix}$$

故取 $P=\begin{pmatrix} I_n & & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_n & \\ -A_{31}A_{11}^{-1} & & I_n\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} I_n & -A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{11}^{-1}A_{13} \\ & I_n & \\ & & I_n\end{pmatrix}$ 即可

习题 1.2.56. $J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3\end{pmatrix}$，其中 $J_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1\end{pmatrix}$ $J_2=\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \\ & & -1\end{pmatrix}$ $J_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2\end{pmatrix}$

求一个五次首一的多项式 $f(X)$，s.t. $f(J)=0$.

解：$f(J)=\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & f(J_2) & \\ & & f(J_3)\end{pmatrix}$. 故需找 $f(X)$ s.t. $f(J_i)=0$.

$J_1^n=(-1)^n\begin{pmatrix} 1 & -n \\ & 1\end{pmatrix}$，$J_2^n=(-1)^n\begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ & 1 & -n \\ & & 1\end{pmatrix}$，$J_3^n=\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ & 2^n\end{pmatrix}$

令 $f(X)=\sum_{i=0}^{5}a_iX^i$，$a_5=1$.

则有
$$\begin{cases} a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-1=0 \\ a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5=0 \\ a_2-3a_3+6a_4-10=0 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4+32=0 \\ -a_1-4a_2-12a_3-32a_4-80=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & -32 \\ & 1 & -2 & 3 & -4 & -5 \\ & & 1 & 4 & 12 & -80 \\ & & 1 & -3 & 6 & 10\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 3 & 5 & -11 \\ & & 1 & & 3 & -2 \\ & & & 1 & 2 & -7 \\ & & & & 3 & -3\end{array}\right)$$

$\Rightarrow a_4=-1$，$a_3=-5$，$a_2=1$，$a_1=+8$，$a_0=4$

1.2.60. $A^3=I_n$，计算 $\begin{pmatrix} & -I_n \\ A & \end{pmatrix}^{2000}$，$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000}$

$$\begin{pmatrix} & -I_n \\ A & \end{pmatrix}^{2000} = \begin{pmatrix} -A & \\ & -A \end{pmatrix}^{1000} = \begin{pmatrix} A^{1000} & \\ & A^{1000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A \end{pmatrix}^{2000} = \begin{pmatrix} A\cos\frac{\pi}{3} & -A\sin\frac{\pi}{3} \\ A\sin\frac{\pi}{3} & A\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}^{2000} = \begin{pmatrix} A^{2000}\cos\frac{2000\pi}{3} & -A^{2000}\sin\frac{2000\pi}{3} \\ A^{2000}\sin\frac{2000\pi}{3} & A^{2000}\cos\frac{2000\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^2\cos\frac{2\pi}{3} & -A^2\sin\frac{2\pi}{3} \\ A^2\sin\frac{2\pi}{3} & A^2\cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A^2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A^2 & -\frac{1}{2}A^2 \end{pmatrix}$$

1.2.62. $A,B\in M_n(K)$，$M=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$

1) 证：M可逆$\Leftrightarrow$ $A+B$ 和 $A-B$可逆

2) 当M可逆时，求M^{-1}.

证：1) "$\Rightarrow$" M可逆，故 $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix}M = \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix}$ 可逆.

令后者逆矩阵为 $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$，则 $(A+B)(C_1+C_3)=I_n$

又 $A+B$为方阵，故 $A+B$ 可逆

对于 $\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}M$，可得 $A-B$可逆

"$\Leftarrow$"

$$M=\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ +\frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & \\ \frac{B-A}{2} & A-B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ \frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & \\ & A-B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ -\frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix}$$

由于 $A+B$，$A-B$ 均可逆，则 $\begin{pmatrix} A+B & \\ & A-B \end{pmatrix}$ 也可逆

（逆矩阵为 $\begin{pmatrix} (A+B)^{-1} & \\ & (A-B)^{-1} \end{pmatrix}$）

且乘积中其余阵均为初等分块矩阵.

故 M 可逆

2) $$M^{-1}=\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ \frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A+B)^{-1} & \\ & (A-B)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \\ -\frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} \\ (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} \end{pmatrix}$$

思考题 2.1. V是K^n的子空间 当且仅当 1. V是非空集合
2. $\forall u,v\in V$, $\forall \lambda\in K$, $u+\lambda v\in V$.

证: "$\Rightarrow$"
1. $0\in V \Rightarrow V\neq\phi$
2. $\left.\begin{array}{l}\forall v\in V,\ \lambda\in K,\ \lambda v\in V\\ u\in V\end{array}\right\}\Rightarrow u+\lambda v\in V$

"$\Leftarrow$" 1. $0+\lambda\cdot 0=0\in V$
2. 取$\lambda=1$, 则有. $\forall u,v\in V$, $u+v\in V$
3. 取$u=0$, 则有 $\forall\lambda\in K, v\in V$, $\lambda v\in V$.

思考题 2.2. 举例: 数目不同, 没有公共向量的两个向量组可能线性等价

$S=\{(1,0),(0,1)\}$, $T=\{(1,1),(1,2),(-1,-2)\}$ $(V=\mathbb{R}^2)$

习题 2.1.1. $\alpha_1=(0,-1,1,1)$, $\alpha_2=(1,-1,1,2)$ $\alpha_3=(0,1,1,2)$
$\alpha_4=(2,2,1,3)$. $\alpha_5=(0,1,-1,-1)$

设$\beta=(3,1,4,8)$, 判断β是否属于$\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_5)$.

解: 令$\beta=\sum_{i=1}^{5}\lambda_i\alpha_i$, 则有方程组

$$\begin{cases}\lambda_2+2\lambda_4=3\\ -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+\lambda_5=1\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4-\lambda_5=4\\ \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4-\lambda_5=8\end{cases}$$

方程组有解 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_5)=(2,1,1,1,1)$

故 $\beta\in\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_5)$

习题 2.1.2 (3) $\alpha_1=(1,-1,0,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,-1,0,0)$, $\alpha_3=(0,0,1,-1,0)$
$\alpha_4=(0,0,0,1,-1)$, $\alpha_5=(-1,0,0,0,1)$, 它们是否线性无关

解: 由于 $\sum_{i=1}^{5}\alpha_i=0$, 故$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$线性相关.

习题 2.1.3. 证明：$\forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in K^n$，

$$\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathrm{span}(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)$$

证：$\forall \alpha \in \mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\alpha_i$.

故 $\alpha = \frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)+\frac{\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2}{2}(\alpha_3+\alpha_1)$

$\Rightarrow \alpha\in \mathrm{span}(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$

$\forall \alpha \in \mathrm{span}(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$，$\alpha=\sum_{i=1}^{3}k_i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_i)$.

则 $\alpha=(k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+k_3)\alpha_2+(k_1+k_2)\alpha_3\in \mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

习题 2.1.4. 设 $\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}$ 是 $[\![1,n]\!]$ 的真子集，考虑 K^n 中

$\alpha_i=(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in})\quad i=1,2,\cdots,m$

现从 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中去掉第 $i_1,\cdots,i_s$ 个分量，得到一组 K^{n-s} 中的向量组 $\alpha_1',\cdots,\alpha_m'$

1. 证明：若 $\alpha_1',\cdots,\alpha_m'$ 线性无关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 也线性无关
2. 若 $\alpha_1',\cdots,\alpha_m'$ 线性相关，是否能判定 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 也线性相关.

证：若存在 $\lambda_i\in K$，$i=1,\cdots,m$，使得 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i=0$.

则有 $\sum\lambda_i\alpha_i'=0$。由于 $\{\alpha_i'\}$ 线性无关，$\lambda_i=0\ \forall i\in\{1,\cdots,m\}$

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

不能判定：考虑 $\alpha_1=(1,0)$，$\alpha_2=(1,1)$.

忽略第2个分量，$\alpha_1'=1$，$\alpha_2'=1$ 线性相关

但 α_1,α_2 线性无关

高代习题课 HW8

甘 2024.11.7

思考题2.3. 证明：若 $U\subseteq V\subseteq K^n$ (子空间)，但 $U\neq V$，则 $\dim U<\dim V$

证：由于 U 是 V 的子空间，$\dim U\leq \dim V$.

若 $\dim U=\dim V$，即存在 U 的极大线性无关组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ ($m=\dim U$)

因为 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 也在 V 中线性无关，故也是 V 中的一组基.

因此 $\forall v\in V$，$\exists a_i\in K$，$i=1,\cdots,m$，s.t. $v=\sum_{i=1}^{m}a_i\xi_i$.

$\Rightarrow v\in U\Rightarrow V\subseteq U$ 与 $U\subsetneq V$ 矛盾！

故 $\dim U<\dim V$

思考题2.4. V 是 K^n 的子空间，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\subseteq V$. 证下列等价：

i) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是一组基

ii) $r=\dim V$ 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

iii) $r=\dim V$ 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的张成组.

证：(i) $\Rightarrow$ (ii) 由定义，显然.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 若不然，$\exists v\in V$，s.t. v 不被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,v$ 是一组线性无关组.

因此 $\dim V\geq r+1$，矛盾！

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 V 的张成组.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则取其极大线性无关组.

不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为极大线性无关组，其中 $s<r$.

则 $\forall v\in V$，v 能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，故能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 于是 $\dim V=s<r$ 矛盾！

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是组基.

习题 1.5. 找极大线性无关组.

3. $\alpha_1=(2,3,1,1)$, $\alpha_2=(4,6,2,2)$ $\alpha_3=(0,1,2,1)$ & $\alpha_4=(0,-1,-2,-1)$.

解: α_1, α_3 为其极大线性无关组.

习题 1.9. 设 $1\le r<n$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组,

令 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ 且 $\alpha=\sum_{i=1}^{r}c_i\alpha_i$, $c_i\in K$ $\forall i$ 且 $\sum_{i=1}^{r}c_i\neq 1$

试求 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n$ 中的一个极大线性无关组.

解: 断言: $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 线性无关

证明: 若 $\sum_{i=1}^{r}a_i(\alpha-\alpha_i)=0$, 则

$$\sum_{i=1}^{r}a_i(\alpha-\alpha_i)=\sum_{i=1}^{r}a_i\left(\sum_{j=1}^{r}c_j\alpha_j-\alpha_i\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}(a_ic_j)\alpha_j-\sum_{i=1}^{r}a_i\alpha_i$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r}(a_jc_i)\alpha_i-a_i\alpha_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\left(\left(\sum_{j=1}^{r}a_j\right)c_i-a_i\right)\alpha_i=0$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, $\left(\sum_{j=1}^{r}a_j\right)c_i=a_i$ $\forall i\in[\![1,r]\!]$

把这 r 个等式相加, $\left(\sum_{j=1}^{r}a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{r}c_i\right)=\left(\sum_{j=1}^{r}a_j\right)$.

由于 $\sum_{i=1}^{r}c_i\neq 1$, 则 $\sum_{j=1}^{r}a_j=0$.

代回原式, 则有 $\sum_{i=1}^{r}(-a_i)\alpha_i=0\Rightarrow a_i=0$, $\forall i\in[\![1,r]\!]$

故证毕.

又 $\alpha-\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}c_j\alpha_j-\alpha_i\in\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, $\forall i\in[\![1,r]\!]$

故 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 是 $\mathrm{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 的一个极大线性无关组, 即一组基.

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 线性表出.

因此 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 可以线性表出 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n$.

所以 $\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_r$ 是一个极大线性无关组.

习题 2.1.11. $r(S)=r$.（若未特别说明，$r(S)$ 表示 S 的秩）

1) 证明：若 S_0 是 S 中 r 个向量组成的线性无关组，则 S_0 是 S 中极大线性无关组.

2) 证明：若向量组 S' 中每个向量都可由 S 线性表出，则 S' 的秩 $\leq r$.

3) S_1 是 S 中 r 个向量组成的子向量组，证明：若 S 中每个向量都可用 S_1 线性表出，则 S_1 是 S 中的极大无关组.

证：
1) 若 S_0 不是，则可把 S_0 扩充成一个极大线性无关组.
于是 S 有一个极大线性无关组，向量个数目大于 r. 与 $r(S)=r$ 矛盾.

2) 由题 $\text{span}(S') \subseteq \text{span}(S)$，故 $\dim \text{span}(S') \leq \dim(\text{span}(S)) = r$.

因此，$r(S') = \dim \text{span}(S') \leq r$.

3) 由(1) 若 S_1 线性无关，则 S_1 是 S 的极大 ⋯.
现考虑若 S_1 线性相关，则由 $r(S)=r$，我们可以将 S_1 扩充成 S 的一个极大线性无关组，设扩充的一个向量为 $\beta \in S$
则有 β 不能被 S_1 表出. 与题设矛盾. 故 S_1 线性无关.

习题 2.1.13. $a_i \in K$ 同 $\sum_{i=1}^n a_i^{-1} \neq -1$，则 $\eta_i := (1,\cdots,1)+(0,\cdots,a_i,0,\cdots 0)$ 线性无关.

证：若 $\sum_{i=1}^n b_i \eta_i = 0$，则有

$$\sum_{i=1}^n b_i \eta_i = \left(\sum_{j=1}^n b_j\right)(1,\cdots,1) + \sum_{i=1}^n (0,\cdots,0,b_i a_i,0,\cdots 0)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n b_i = -b_1 a_1 = -b_2 a_2 = \cdots = -b_n a_n \quad \cdots (*)$$

若 $\sum_{i=1}^n b_i \neq 0$，则 $\frac{1}{a_i} = \frac{-b_i}{\sum_{j=1}^n b_j}$，$\forall i \in [1,n]$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = \frac{-\sum_{j=1}^n b_j}{\sum_{j=1}^n b_j} = -1 \text{ 矛盾!}$$

故 $\sum_{i=1}^n b_i = 0$. 代入式(*)，有 $a_i b_i = 0$，$\forall i \in [1,n]$.
又 $a_i \neq 0$，$\Rightarrow b_i = 0$ $\forall i \in [1,n] \Rightarrow \eta_i$ 线性无关.

思考题2.5 设 $A\in M_{m\times n}(K)$，A经过有限次初等行变换变成A'，记 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为A的列向量，$\alpha_1',\cdots,\alpha_n'$为$A'$的列向量。

1) 证明：$\{j_1,\cdots,j_s\}\subseteq[1,n]$，$\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}$线性无关$\Leftrightarrow\alpha_{j_1}',\cdots,\alpha_{j_s}'$线性无关

2) 根据上小题，给出一个极大无关组的计算方法。

证明：1) 令 $A'=P_1\cdots P_r\cdot A$，则有

$$\alpha_{j_i}'=P_1\cdots P_r\alpha_{j_i}$$

故 $\sum a_i\alpha_{j_i}'=0 \Leftrightarrow \sum a_i(P_1\cdots P_r\alpha_{j_i})=P_1P_2\cdots P_r\cdot(\sum a_i\alpha_{j_i})=0$

$\Leftrightarrow \sum a_i\alpha_{j_i}=0$.

故 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}$线性无关$\Leftrightarrow\alpha_{j_1}',\cdots,\alpha_{j_s}'$线性无关。

2) 将$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$并成矩阵A，再将A化为行最简形A'

再选取A'的列向量组的极大无关组 $\alpha_{j_1}',\cdots,\alpha_{j_s}'$

则$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组为$\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}$。

思考题2.6，$A\in M_{m\times n}(K)$。1.证：$\operatorname{rank}(A)\le\min\{m,n\}$（若$\operatorname{rank}(A)=\min\{m,n\}$，则称

2.若$\operatorname{rank}(A)=m$，则称A行满秩，$\operatorname{rank}A=n$则A列满秩）

证明：a) A行满秩$\Leftrightarrow$A有右逆；A列满秩$\Leftrightarrow$A有左逆。

b) A方阵，则A行满秩$\Leftrightarrow$A列满秩。

答：1. $\operatorname{rank}(A)\le m$ 并且 $\operatorname{rank}(A)\le n\Rightarrow\operatorname{rank}(A)\le\min\{m,n\}$

2. 若A行满秩，则A的相抵标准形亦行满秩。

即$\exists$可逆P, Q s.t. $PAQ=(I_m,0)\Rightarrow A=P^{-1}(I_m,0)Q^{-1}$

则 $AQ\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix}=P^{-1}(I_m,0)Q^{-1}Q\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix}=I_m$

故A有右逆 $Q\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix}$

若A有右逆，由思考题2.5(1)，可得行向量线性无关，故行满秩。

列之情况可用转置，转化成对行向量之讨论.
故也成立.

(5) A为方阵，由推论 1.2.29.

A有右逆 $\Leftrightarrow$ A有左逆 故 A行满秩 $\Leftrightarrow$ A列满秩.

习题 2.2.2 求矩阵之秩：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解：断言：前 $n-1$ 个行向量线性无关.（记行向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$）

若 $\sum_{i=1}^{n-1} a_i\alpha_i = 0$，令 $\varepsilon_i = (0,\cdots,\overset{i}{1},0\cdots0)$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i\alpha_i = \sum_{i=2}^{n-1} a_i(\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1}) + a_1(\varepsilon_1+\varepsilon_n)$$

$$= (a_1+a_2)\varepsilon_1 + (a_2+a_3)\varepsilon_2 + \cdots + (a_{n-2}+a_{n-1})\varepsilon_{n-2} + a_{n-1}\varepsilon_{n-1} + a_1\varepsilon_n$$

$$= 0$$

由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，有

$a_1 = a_{n-1} = 0$，$\Rightarrow$ $a_2 = a_{n-2} = 0$ $\to$ $\cdots \Rightarrow$ $a_i = 0$，$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$

故证毕.

当 n 为偶数时，$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_i = 0$. 故 $r = n-1$. 当 n 为奇数时，$r = n$.

习题 2.2.3 根据参数 λ 之取值，讨论矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 之秩之取值.

解. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 2 & 5 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ & 1 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ & & -3(\lambda-3) & \lambda-3 \end{pmatrix}$

故当 $\lambda \neq 3$，秩为 3，当 $\lambda = 3$，秩为 2.

高等代数习题课

2024.11.21

2.2.7 $A\in M_{m\times n}(K)$，B是从A中选出s行得到的$s\times n$阵.

证明 $\mathrm{rank}B \geq \mathrm{rank}A+s-m$. 并说明>与=的情况均可能出现

证明：设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是A的行向量，$\mathrm{rank}A=r_1$，$\mathrm{rank}B=r_2$.

令$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_2}}$是B的一个极大线性无关的行向量组.

将其扩充为A的一个极大线性无关的行向量组$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_2}},\alpha_{i_{r_2+1}},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$

其中$\alpha_{i_{r_2+1}},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$在剩下的$m-s$个行向量中选取.

故$r_1-r_2\leq m-s$，即$\mathrm{rank}B\geq \mathrm{rank}A+s-m$

例：考虑$A=\begin{pmatrix}1&\\1&\\&1\end{pmatrix}$，$B_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}A=2$，$\mathrm{ran}B_1=1$，$\mathrm{rank}B_2=2$.

$\Rightarrow \mathrm{rank}B_1=1=\mathrm{rank}A+2-3$

$\mathrm{rank}B_2=2>\mathrm{rank}A+2-3$

2.2.8 $r(A)\leq 1$，证：$\exists a_1,\cdots,a_m\in K$和$b_1,\cdots,b_n\in K$，s.t.

$$A=(a_ib_j)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$$

证：1. 若$r(A)=0$，则$A=0$，显然成立

2. 若$r(A)=1$，则令其一非零行向量$\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

其余行均为α的倍数、不妨令第i行为$a_i\alpha$.

则$A=\begin{pmatrix}a_1\alpha\\a_2\alpha\\\vdots\\a_m\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)=(a_ib_j)$

2.2.9.(2) 解基础解系

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 3&2&1&1&-3 \\ &1&2&2&6 \\ 5&4&3&3&-1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ &-1&-2&-2&-6 \\ &1&2&2&6 \\ &-1&-2&-2&-6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1 \\ &1&2&2&6 \\ &&&& \\ &&&& \end{bmatrix}$$

令 $(x_3, x_4, x_5) = (1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ 则有

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1,-2,1,0,0)$，$(1,-2,0,1,0)$，$(5,-6,0,0,1)$

得基础解系为 $(1,-2,1,0,0)^T$ $(1,-2,0,1,0)^T$ $(5,-6,0,0,1)^T$.

2.2.13. $A \in M_n(K)$，$b \in K^{n\times1}$. $B = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$. 证明：如果 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$，则线性方程组 $AX=b$ 有解.

证：令 A 的列向量组中一极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$.

则在 B 的列向量组中 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ b_{i_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{i_2} \\ b_{i_2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ b_{i_r} \end{pmatrix}$ 依旧线性无关.

由于 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$，上述为 B 的列向量组的一个极大线性无关组.

因此 $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ 能被 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ b_{i_1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ b_{i_r} \end{pmatrix}$ 线性表出，进而 b 能被 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.

故 $AX=b$ 必有解.

2.2.14. $A \in M_{m\times n}(K)$，$B \in M_{m\times s}(K)$，考虑 $X \in M_{n\times s}(K)$. $AX=B$.

1. 设 $C=(A\ B)$. 证明 $AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}C$.
2. 利用矩阵的秩给出 $AX=B$ 有唯一解的充要条件.

证：1) "$\Rightarrow$" A 中极大线性无关的列向量组在 C 的列向量中亦线性无关.

故 $\mathrm{rank}A \le \mathrm{rank}C$.

又 $C = (A\ \ AX_0) = A(I_n\ \ X_0)$ （X_0 为方程 $AX=B$ 的解）

故 $\mathrm{rank}A \ge \mathrm{rank}A(I_n\ X_0) = \mathrm{rank}C$

故 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}C$

"$\Leftarrow$" 由上述讨论可知，若 $\mathrm{rank}C = \mathrm{rank}A$，则 A 中极大线性无关的列向量组亦为 C 中极大的线性无关的列向量组.

因此它们能线性表出 B 的所有列向量，即 $\exists X_0$ s.t. $AX_0 = B$.

2) A 列满秩且 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}C$.

2.2.15. 1) 找通解以及齐线方程的基础解系.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)$$

$x_3=0$. 齐次线性方程的基础解系为

$$\eta_1=(0,\tfrac{1}{2},1,0,0),\ \eta_2=(0,-\tfrac{1}{2},0,1,0),\ \eta_3=(\tfrac{1}{3},\tfrac{5}{6},0,0,1)$$

一特解为 $\eta_0=(\frac{2}{3},\frac{1}{6},0,0,0)$. 故通解为 $\eta_0^T+k_1\eta_1^T+k_2\eta_2^T+k_3\eta_3^T$, $k_i\in K$, $i\in[1,3]$

2.2.16. γ_0是$AX=b$的一个特解. $\eta_1,\cdots,\eta_s$是齐次线性方程组的一个基础解系.

令 $\gamma_i=\gamma_0+\eta_i$. $i=1,\cdots,s$. 证: 任意 $AX=b$的解γ, $\gamma=\sum_{i=0}^{s}c_i\gamma_i$, 且 $\sum_{i=0}^{s}c_i=1$.

证: $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s=k_1\gamma_1+\cdots+k_s\gamma_s+(1-k_1-k_2-\cdots-k_s)\gamma_0$

故 $c_i=\begin{cases}k_i & i=1,2,\cdots,s\\ 1-\sum_{i=1}^{s}k_i & i=0\end{cases}$ 且 $\sum c_i=1$.

2.2.22. L过点 $A(2,3,-5)$ 且与线 l: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$ 平行.

解: L: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+5}{4}$

2.2.30 直线l与平面π方程如下:

l: $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$, 与 l: $\frac{x-13}{8}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$,

π: $x+2y-5z-11=0$. π: $x+2y-4z+1=0$.

判断l与π的位置关系.

解: 1) $\vec{l}=(2,-2,3)$, $\vec{n}=(1,2,-5)$

$\vec{l}\cdot\vec{n}=2-4-15\neq0$,

令 $x=2k+5$, $y=-2k-3$, $z=3k+1$, 代入π, 得

$-17k-17=0\Rightarrow k=-1$

故l与π相交于点 $(3,-1,-2)$

2) $\vec{l}=(8,2,3)$, $\vec{n}=(1,2,-4)$

$\vec{l}\cdot\vec{n}=0$

l过点$(13,3,4)$, 代入π.

$13+2\times6-16+1\neq0$

故l与π平行, 不相交.

2.2.31. 平面直角坐标系中点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$

1) 证: A, B, C 三点不共线 $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为3.

2) 若 A, B, C 三点不共线, $P(\alpha, \beta)$ 是三角形 ABC 的外接圆圆心.

证明: 若 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 均为有理数, 则 $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

证: 1)

A, B, C 三点不共线 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1 x + a_2 y + z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + z = 0 \\ c_1 x + c_2 y + z = 0 \end{cases}$ 只有零解.

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

2) P 为三角形 ABC 三边中垂线交点.

中垂线方程为 $(b_2 - a_2)(y - \frac{b_2 + a_2}{2}) + (b_1 - a_1)(x - \frac{b_1 + a_1}{2}) = 0$.

由于三点不共线, 故 $b_2 - a_2$, $c_2 - b_2$, $a_2 - c_2$ 至多只有一个为0.

不妨设 $b_2 - a_2 \neq 0$, 则 $y = Ax + B$. 其中 A, B 为 a_1, b_1, a_2, b_2 的分式

代入其余两式中, 总可用加减乘除法解出 x, 进而解出 y.

上述过程只用到加减乘除且 $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, 故 $x, y \in \mathbb{Q}$.

高代习题课 HW10

甘 2024.11.28

思考题 2.7. V是K上向量空间，$\alpha\in V$，$c\in K$，证明：

1. $-(-\alpha)=\alpha$　　2. $c\alpha=0 \Rightarrow c=0$ or $\alpha=0$

思考题2.8　W是K上向量空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为其中的向量组．TFAE：

1. $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关　　2、0的表示式是唯一的．

3、$\forall\beta\in W$且β能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$表出，则表达式唯一．

证：$1\Rightarrow2$．由定义．

$2\Rightarrow3$．若有 $\beta=a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r=b_1\alpha_1+\cdots+b_r\alpha_r$，则

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)\alpha_i=0$$

由2 $\Rightarrow a_i=b_i\ \ \forall i\in[\![1,r]\!]$．$\Rightarrow$表达式唯一．

$3\Rightarrow1$．0能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$表出$\Rightarrow 0=0\cdot\alpha_1+\cdots+0\cdot\alpha_r$表达式唯一．

由定义，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关

思考题2.10．$Z=\{(a_n)\in K^{\mathbb{N}}:(a_n)$几乎处处为0$\}$．求$Z$的一组基．

令$\varepsilon_i=(0,\cdots,1,0,\cdots)$，仅有第$i$项为1，其余为0．

则$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,\cdots$为$Z$的一组基．

习题2.3.1．1．$V=\mathbb{R}^2$，$(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$，$k\boxdot(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$

不是向量空间，显然$(0,0)$为0向量，而$\forall$ $0\boxdot(a_1,b_1)=(a_1,b_1)\neq0$
对于$(a_1,b_1)\neq0$．

2．$V=\mathbb{R}^+$，$a\boxplus b=ab$，$k\boxdot a=a^k$．

是向量空间．

习题 2.3.3 令 $V=\mathbb{R}^2$，定义. $(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)$

$k\boxdot(a_1,b_1)=(ka_1, kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$

1. 证明. V是$\mathbb{R}$向量空间

2. 令 $M=\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$，$N=\{(0,b): b\in\mathbb{R}\}$，$M,N$是否是$V$的子空间.

证

1. ① $(a_2,b_2)\boxplus(a_1,b_1)=(a_2+a_1,\ b_2+b_1+a_2a_1)=(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)$

② $(0,0)\boxplus(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$

③ $[(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)]\boxplus(a_3,b_3)=(a_1+a_2+a_3\ ,\ b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)$

$\Rightarrow$ $(a_1,b_1)\boxplus[(a_2,b_2)\boxplus(a_3,b_3)]=[(a_2,b_2)\boxplus(a_3,b_3)]\boxplus(a_1,b_1)$

$=(a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3+\sum_{1\le i<j\le 3}a_ia_j)$

$=[(a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)]\boxplus(a_3,b_3)$

④ $(a_1,b_1)\boxplus(-a_1,-b_1+a_1^2)=(a_1-a_1\ ,\ b_1-b_1+a_1^2+a_1\cdot(-a_1))=(0,0)$

⑤ $(kl)\boxdot(a_1,b_1)=(kla_1,\ klb_1+\frac{kl(kl-1)}{2}a_1^2)$

$k\boxdot(l\boxdot(a_1,b_1))=k\boxdot(la_1,\ lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2)$

$=(kla_1,\ klb_1+\frac{kl(l-1)}{2}a_1^2+\frac{k(k-1)}{2}(kla_1)^2)$

$=(kla_1,\ klb_1+\frac{kl(kl-1)}{2}a_1^2)$

⑥

$k\boxdot((a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2))=k\boxdot(a_1,b_1)\boxplus k\boxdot(a_2,b_2)$

⑦ $1\boxdot(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$

⑧ $(k+l)\boxdot(a_1,b_1)=((k+l)a_1\ ,\ \frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a_1^2+(k+l)b_1)$

$=(ka_1,\ kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2)\boxplus(la_1\ ,lb_1+\frac{l(l-1)}{2}a_1^2)$

$=k\boxdot(a_1,b_1)\boxplus l\boxdot(a_1,b_1)$

2. $(1,0)\boxplus(1,0)=(2,1)\notin M$ 故M不是子空间

$(0,0)\in N$, $(0,b_1)\boxplus(0,b_2)=(0,b_1+b_2)\in N$, $k\boxdot(0,b_1)=(0,kb_1)\in N$ $\Rightarrow N$是子空间

习题 2.3.4. $V\neq\phi$, 定义一个加法满足

a) 加法结合律 b) $\exists 0\in V$ s.t. $\forall v\in V, v+0=v$ c) $\forall v\in V$, $\exists u\in V$, s.t. $v+u=0$.

1. $\forall \alpha,\beta\in V$, $\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta+\alpha=0$

2. $\forall v\in V$, 均有 $0+v=v$.

证: 1. 对于 $\beta\in V$, $\exists \gamma\in V$ s.t. $\beta+\gamma=0$.

$\alpha=\alpha+0=\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma=0+\gamma$

$\Rightarrow \beta+\alpha=\beta+(0+\gamma)=(\beta+0)+\gamma=\beta+\gamma=0$

2. $\forall v\in V$, $v+0=0+v=v$.

习题 2.3.11 $V=\mathbb{R}\sqcup\{\infty,-\infty\}$. 定义加法: $+|_{\mathbb{R}}$ 为通常意义且

$a+\infty=\infty+a=\infty$, $a+(-\infty)=-\infty+a=-\infty$

$\infty+\infty=\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $\infty+(-\infty)=-\infty+\infty=0$

定义数乘: $\cdot|_{\mathbb{R}}$ 为通常意义且

$\lambda\cdot\infty=\begin{cases}\infty & \lambda>0\\ 0 & \lambda=0\\ -\infty & \lambda<0\end{cases}$ $\lambda\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty & \lambda>0\\ 0 & \lambda=0\\ \infty & \lambda<0\end{cases}$

请问按照如上定义, 哪些性质成立 哪些不成立 (向量空间的8条)

解: ① $a+b=b+a$ 成立

② $(a+b)+c=a+(b+c)$ 不成立 $(-\infty+\infty)+8=0+8=8$

$-\infty+(\infty+8)=-\infty+\infty=0$

③ $0+a=a$ 成立

④ $\forall a\in V$, $\exists -a\in V$ s.t. $a+(-a)=0$ 成立

⑤ $(kl)a=k(la)$ 成立

⑥ $(k+l)a=ka+la$ 不成立 $(3-2)\infty=1\cdot\infty=\infty$

$3\cdot\infty-2\infty=\infty-\infty=0$

⑦ $\exists 1\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall a\in V$. $1\cdot a=a$ 成立.

⑧ $k\cdot(a+b)=ka+kb$ 成立

习题 2.3.12. 在 K^n 中下列子集合是否是子空间, 是则求维数, 并给出基, 不是则求其生成的子空间.

3. $K=\mathbb{R}$, $V=\{(a_1,\cdots,a_n)\in K^n$: 有某个 i s.t. $a_i>0\}$

解：不是子空间，$(1,\cdots,1)\in V$，$-(1,\cdots,1)=(-1,\cdots,-1)\notin V$.

由于 $\varepsilon_i=(0,\cdots,1,\cdots 0)$ 均属于 $V \Rightarrow K^n\subseteq\langle V\rangle \Rightarrow K^n=\langle V\rangle$.

$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为一组基.

习题 2.3.15 $U, W< V$, TFAE:

1) $U\cup W=U+W$ 2) $U\subseteq W$ 或 $W\subseteq U$ 3) $U\cup W$ 是子空间.

1) $\Rightarrow$ 2) 若 $W\not\subseteq U$，即 $\exists w\in W$，$w\notin U$

则 $\forall u\in U$，$u+w\notin U$（否则 $w\in U-u=U$，矛盾）

但是 $u+w\in U+W=U\cup W\Rightarrow u+w\in W$

$\Rightarrow u\in W-w=W \Rightarrow U\subseteq W$.

2) $\Rightarrow$ 3) 假设 $U\subseteq W$，$U\cup W=W<V$

若 $W\subseteq U$，$U\cup W=U<V$

3) $\Rightarrow$ 1) 易证 $U\cup W\subseteq U+W$.（$0\in U$ & $0\in W$）

$\forall u+w\in U+W$，由 $u\in U\cup W$，$w\in U\cup W \xRightarrow{U\cup W\text{是子空间}} u+w\in U\cup W$

$\Rightarrow U+W\subseteq U\cup W \Rightarrow U+W=U\cup W$

习题 2.3.18 设 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\in\mathbb{C}$，定义 $\mathbb{Q}(\omega)=\{a+b\omega \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

1. 证明：$\mathbb{Q}(\omega)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个扩域，而且 $\overline{\omega}\in\mathbb{Q}(\omega)$
2. 求 $\mathbb{Q}(\omega)$ 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间的一组基.
3. 找出下列向量组的极大线性无关组.

a) $\frac{1}{2}$, -3, 4

b) $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4$

c) $\omega,\overline{\omega},\sqrt{3}i$

证：1. 注意到 $\omega^3=1 \Rightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^2+\omega+1=0$

故 $\mathbb{Q}(\omega)$ 对乘法封闭且 $\forall a+b\omega\in\mathbb{Q}(\omega)$，$b\neq 0$，则 $ab-a^2-b^2<0$.

$$\frac{b-a+b\omega}{ab-a^2-b^2}\cdot(a+b\omega)=\frac{ab-a^2+b^2\omega+b^2\omega^2}{ab-a^2-b^2}=\frac{ab-a^2-b^2}{ab-a^2-b^2}=1.$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}(\omega)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的扩域，而 $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}\in\mathbb{Q}(\omega)$

2. $1,\omega$ 为 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的一组基.（张成且线性无关）

3. a) $\frac{1}{2}$ b) $1,\omega$ c) $\omega,\overline{\omega}$

高代习题课 — HW 11

甘 2024.12.1

思考题 2.11. $U=\{f\in K[X]:\deg f$ 为偶或 $f=0\}$，U 是否为 $K[X]$ 的子空间.

解：不是子空间，$f(X)=X^2+X\in U$，$g(X)=X^2\in U$，$f(X)-g(X)\notin U$.

思考题 2.13、$U_1,U_2,U_3<V$，TFAE：

(1) $U_1\cap U_2=(U_1+U_2)\cap U_3=0$

(2) $U_2\cap U_3=(U_2+U_3)\cap U_1=0$

(3) $U_3\cap U_1=(U_3+U_1)\cap U_2=0$

(4) $U_1\cap(U_2+U_3)=U_2\cap(U_3+U_1)=U_3\cap(U_1+U_2)=0$

证明：1) ⇒ 2)

$U_3\cap U_2\subset(U_1+U_2)\cap U_3=0\Rightarrow U_3\cap U_2=0$

若 $\alpha_1\in(U_2+U_3)\cap U_1$，则 $\exists\,\alpha_2\in U_2,\alpha_3\in U_3$ 使 $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3\in U_1$

则 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2\in U_3\cap(U_1+U_2)=0\Rightarrow\alpha_3=0$

又 $U_1\cap U_2=0\Rightarrow\alpha_1=0$ 故 $(U_2+U_3)\cap U_1=0$

2) ⇒ 3) 与上推导类似

3) ⇒ 1) 与上推导类似

1) ⇒ 4) 上面已证 "1) ⇒ 2)"，"2) ⇒ 3)" ⇒ "1) ⇒ 3)"，

故有 $U_1\cap(U_2+U_3)=U_2\cap(U_1+U_3)=U_3\cap(U_2+U_1)=0$

4) ⇒ 1)

$U_1\cap U_2\subset U_1\cap(U_2+U_3)=0\Rightarrow U_1\cap U_2=0$

思考题 2.15、举例说明子空间直和补一般不唯一.

解：$\mathbb{R}^2$ 中 x 轴的直和补为所有过原点的非 x 轴直线.

习题 2.3.21. $U:=\{f\in\mathbb{R}[X]_{\le4}:f(2)=f(5)\}$. 证明：$U<\mathbb{R}[X]_{\le4}$，并求基.

证. ① $0\in U$ ② $\forall f_1,f_2\in U$，$k\in\mathbb{R}$，$(f_1+f_2)(2)=f_1(2)+f_2(2)=f_1(5)+f_2(5)=(f_1+f_2)(5)\in U$

$(kf_1)(2)=kf_1(2)=k\cdot f_1(5)=(kf_1)(5)\in U$

故 $U<\mathbb{R}[X]_{\le4}$.

基：$1,\ (x-2)(x-5),\ x(x-2)(x-5),\ x^2(x-2)(x-5)$

习题 2.3.23. $A\in M_n(K)$, $C_A:=\{B\in M_n(K):AB=BA\}$

1. 证明：$C_A<M_n(K)$

2、$A=\mathrm{diag}(1,\cdots,n)$，求 C_A 的维数与一组基

3、$n=3$，$A=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\3&1&2\end{pmatrix}$，求 C_A 的维数与一组基.

证：1) $0\in C_A$　$\forall B_1,B_2\in C_A$，$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$

$\forall k\in K$，$A(kB_1)=kAB_1=(kB_1)A$，即 $B_1+B_2\in C_A$，$kB_1\in C_A$

故 $C_A<M_n(K)$

2) 令 $B=\sum\limits_{i,j=1}^{n}b_{ij}E_{ij}\in C_A$，则 $AB-BA=\sum\limits_{k=1}^{n}kE_{kk}\sum\limits_{i,j=1}^{n}b_{ij}E_{ij}-\sum\limits_{i,j}b_{ij}E_{ij}\sum\limits_{k}kE_{kk}$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}(ib_{ij}-jb_{ij})E_{ij}=0$$

$\Rightarrow$ 当 $i\neq j$ 时，$b_{ij}=0$．故 $B=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}E_{ii}$，$b_{ii}\in K$.

因此 C_A 维数为 n，$E_{11},E_{22},\cdots,E_{nn}$ 为其一组基.

3) 令 $B=\sum b_{ij}E_{ij}\in C_A$，则 $AB-BA=\left[I+\begin{pmatrix}&&\\&&\\3&1&1\end{pmatrix}\right]B-B\left[I+\begin{pmatrix}&&\\&&\\3&1&1\end{pmatrix}\right]$

$$=\begin{pmatrix}&&\\&&\\3&1&1\end{pmatrix}B-B\begin{pmatrix}&&\\&&\\3&1&1\end{pmatrix}=0$$

即 $\begin{cases}b_{13}=b_{23}=0\\3b_{13}+b_{23}+b_{33}=b_{33}\\3b_{12}+b_{22}+b_{32}=b_{33}\\3b_{11}+b_{21}+b_{31}=3b_{33}\end{cases}$，其一基础解系为 $\begin{pmatrix}1&&\\&&\\&1&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}&&\\1&&\\&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}&&\\&&\\1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}&1&\\&&\\&-3&\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}&&\\&1&\\&-1&\end{pmatrix}$

取自由变量为

$b_{11},b_{21},b_{31},b_{12},b_{22}$，则

故以上五个矩阵构成 C_A 的一组基，$\dim C_A=5$.

习题 2.3.28 (1). $U=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2)$，$W=\mathrm{span}(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_2=(-1,1,1,1)$

$\beta_1=(2,-1,0,1)$．$\beta_2=(1,-1,3,7)$．求 $U\cap W$ 与 $U+W$ 的一组基.

解：作初等行变换：$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&1&1&1\\2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&3&2&1\\&5&2&-1\\&-3&2&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\&3&2&1\\&2&1&0\\&&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\&3&2&1\\&2&1&\\&&&\end{pmatrix}$

(不变换行)

故 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 为 $U+W$ 的一组基.

由维数公式可知, $\dim U\cap W=1$.

令 $\beta_2=a\alpha_1+b\alpha_2+c\beta_1$.

$$\begin{cases} a-b+2c=1 \\ 2a+b-c=-1 \\ a+b=3 \\ b+c=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=3 \end{cases}, \text{故 } 4\alpha_2-\alpha_1=\beta_2-3\beta_1\in U\cap W$$

故 $4\alpha_2-\alpha_1=(-5,2,3,4)$ 是 $U\cap W$ 的一组基.

习题 2.3.24 考虑 $U=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2)$, $W=\mathrm{span}(\alpha_3,\alpha_4)$. 其中

$\alpha_1=(-1,1,1,0)$, $\alpha_2=(0,1,-1,1)$, $\alpha_3=(1,0,0,0)$, $\alpha_4=(0,0,0,1)$

问: $K^4=U\oplus W$?

解: ✓

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & & & \\ & & & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ & & & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

故 $U+W$ 是直和且 $\dim U+\dim W=\dim K^4$

故 $U\oplus W=K^4$

习题 2.3.36. $V=M_n(K)$, $U=\{x\in M_n(K): x=x^T\}$, $W=\{x\in M_n(K): x+x^T=0\}$

1. 证明: U, W 是 V 的子空间, 并分别求其一组基.
2. 证明: $\forall A\in V$, 均有 $A+A^T\in U$, $A-A^T\in W$
3. 证明: $V=U\oplus W$

证: 1. $E_{ij}+E_{ji}$ $1\le i\le j\le n$ 是 U 的一组基.

$E_{ij}-E_{ji}$, $1\le i<j\le n$ 是 W 的一组基.

2. $(A+A^T)^T=A^T+A$

$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$

3. $\forall A\in V$, $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}\in U+W$. $\dim U+\dim W=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2=\dim V$

故 $V=U\oplus W$

习题 3.1.1. $f: V\to W$，f 是线性映射 $\Leftrightarrow \forall a,b\in K$，$u,v\in V$，均有 $f(au+bv)=af(u)+bf(v)$

证："$\Rightarrow$" f 是线性映射，故 $f(au+bv)=f(au)+f(bv)=af(u)+bf(v)$

"$\Leftarrow$" 取 $a,b=1$，则有 $\forall u,v\in V$，$f(u+v)=f(u)+f(v)$

取 $b=0$，$v=0$，则有 $\forall u\in V$，$a\in K$，$f(au+0)=f(au)=af(u)+0=af(u)$

习题 3.1.2. $V=K[X]$，$\forall f(X)\in V$，令 $\mathcal{A}(f(X))=f(X+1)-f(X)$

1. 求 $\mathcal{A}(2)$ 2. 证明：$\mathcal{A}$ 是 $V\to V$ 的线性变换 3. $\mathcal{A}$ 是否是单射，为什么？

解.

1. $\mathcal{A}(2)=2-2=0$

2. $\forall f(X),g(X)\in V$，$\mathcal{A}(f(X)+g(X))=\mathcal{A}((f+g)(X))=(f+g)(X+1)-(f+g)(X)$

$=f(X+1)-f(X)+g(X+1)-g(X)=\mathcal{A}(f(X))+\mathcal{A}(g(X))$

$\forall k\in K$，$f(X)\in V$，$\mathcal{A}(kf(X))=\mathcal{A}((kf)(X))=kf(X+1)-kf(X)=k(f(X+1)-f(X))=k\mathcal{A}(f(X))$

故 $\mathcal{A}$ 是 $V\to V$ 的线性变换

3. $\mathcal{A}(2)=\mathcal{A}(0)=0$，故不是单射.

高代习题课 HW 12

甘 2024.12.9

思考题 8.1. $f: V\to W$. 证明

1) f满, $\dim V<\infty$, 则 W 也是有限维且 $\dim V \geq \dim W$

2) f单, $\dim W<\infty$, 则 V 也是有限维且 $\dim V \leq \dim W$

3) f是同构, 则 f^{-1} 也是同构.

证: 1) 设 V 有一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$. 则 $f(v_i)$, $1\le i\le n$ 是 W 的一个张成组.

故 $\dim W \leq |\{f(v_i): 1\le i\le n\}| = n = \dim V$

2) 设 V 有一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 则 $f(v_i)$, $1\le i\le n$ 是 W 中的一个线性无关组.

故 $\dim W \geq |\{f(v_i): i\}| = n = \dim V$

3) 首先 f^{-1} 是双射. (f是其逆), 下证 f^{-1} 是线性映射.

$\forall w_1, w_2 \in W$, $\exists v_1, v_2 \in V$, s.t. $f(v_i) = w_i$, $\forall i=1,2$. $\Rightarrow f(v_1+v_2) = w_1+w_2$

于是有 $f^{-1}(w_1+w_2) = v_1+v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$

$\forall k\in K$, $w\in W$, $\exists v\in V$, s.t. $f(v)=w$, $\Rightarrow f(kv) = kw$

于是有 $f^{-1}(kw) = kv = k f^{-1}(w)$

思考题 8.2. $f: V\hookrightarrow W$, f的左逆是否一定是线性映射?

不一定: $f: \mathbb{R}\hookrightarrow \mathbb{R}^2$, $x\mapsto (x,0)$ 是单线性映射, 但是其左逆 $g: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x+xy$ 不是线性的.

$g((1,1)+(2,2)) = g(3,3) = 12$. 而 $g(1,1) = 2$, $g(2,2) = 6$.

习题 8.1.9 $V=\mathbb{R}^2$ (如习题 2.3.3 中定义), $W=\mathbb{R}^2$ (通常定义). 写出一个 V 与 W 的同构.

解: 令 $f(a,b) = (a, a^2-2b)$, $f^{-1}(a,b) = (a, \frac{a^2-b}{2})$, 故 f是双射.

下证 f 线性: $f((a_1,b_1)\boxplus(a_2,b_2)) = f(a_1+a_2, b_1+b_2+a_1a_2) = (a_1+a_2, a_1^2+a_2^2-2b_1-2b_2)$

$\forall a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$

$= (a_1, a_1^2-2b_1) + (a_2, a_2^2-2b_2) = f(a_1,b_1) + f(a_2,b_2)$

$f(k\boxdot(a_1,b_1)) = f(ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2}a_1^2) = (ka_1, k^2a_1^2 - (2kb_1 + (k^2-k)a_1^2))$

$= (ka_1, -2kb_1 + ka_1^2) = k f((a_1,b_1))$

故 f 是同构.

习题3.1.6. $\dim_K V=1$，证：$\forall f\in\mathrm{End}_K V$，$\exists\lambda\in K$ st. $f(v)=\lambda v$，$\forall v\in V$.

证：令 $V=\mathrm{span}\{v_1\}$. $f(v_1)=\lambda v_1$，$\lambda\in K$.

则 $\forall v\in V$，$v=kv_1$，$k\in K$ 且 $f(v)=f(kv_1)=kf v_1=\lambda(kv_1)=\lambda v$.

习题3.1.8 $\mathcal{A}:V\to V$，$\dim V=n$. TFAE:

1) $\mathcal{A}$可逆 2) $\forall\alpha\in V,\alpha\neq0$. 则 $\mathcal{A}\alpha\neq0$. 3) $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是基，则$\mathcal{A}(\varepsilon_i)$，$1\le i\le n$是基.

4) 对任意直和分解 $V=U\oplus W$，其中 $U,W<V$，总有 $V=\mathcal{A}(U)\oplus\mathcal{A}(W)$.

证：1) $\Rightarrow$ 2) $\mathcal{A}$单 $\Rightarrow\mathcal{A}\alpha\neq\mathcal{A}0=0$.

2) $\Rightarrow$ 3) 若 $\sum_{i=1}^n a_i\mathcal{A}(\varepsilon_i)=0$，则 $\mathcal{A}(\sum a_i\varepsilon_i)=0$，即 $\sum a_i\varepsilon_i=0$，

由于ε_i，$1\le i\le n$是一组基，$a_i=0$，$\forall i$. $\Rightarrow\mathcal{A}\varepsilon_i$，$i\in[\![1,n]\!]$线性无关

$\dim V=n\Rightarrow\underset{i\in[\![1,n]\!]}{\mathcal{A}\varepsilon_i}$是基.

3) $\Rightarrow$ 4)

令 $v_1,\cdots,v_r$是U的一组基，$w_1,\cdots,w_{n-r}$是W的一组基，

则 $v_1,\cdots,v_r,w_1,\cdots,w_{n-r}$ 是 V的一组基

$\Rightarrow\mathcal{A}(v_1),\cdots,\mathcal{A}(w_{n-r})$也是$V$的一组基.

① $V=\mathcal{A}(U)+\mathcal{A}(W)$：$\forall v\in V$，$v=\sum_{i=1}^r a_i\mathcal{A}(v_i)+\sum_{i=1}^{n-r}b_i\mathcal{A}(w_i)\in\mathcal{A}(U)+\mathcal{A}(W)$

② $\mathcal{A}(U)\cap\mathcal{A}(W)=\{0\}$：若 $\sum_{i=1}^r a_i\mathcal{A}(v_i)=\sum_{j=1}^{n-r}b_j\mathcal{A}(w_j)\in\mathcal{A}(U)\cap\mathcal{A}(W)$，由于$\mathcal{A}v_1,\cdots,\mathcal{A}w_{n-r}$是基.

则 $a_i=0$，$b_j=0$，$\forall i,j$ $\Rightarrow$ 只有 $0\in\mathcal{A}(U)\cap\mathcal{A}(W)$

4) $\Rightarrow$ 1) 单：若 $\mathcal{A}(v)=0$，则考虑子空间 $\mathbb{C}v$ 与其直和补 W.（令W的基为$w_1,\cdots,w_r$）

$$V=\mathbb{C}v\oplus W\Rightarrow V=\mathcal{A}(\mathbb{C}v)\oplus\mathcal{A}W=\mathcal{A}W$$

$\mathcal{A}w_1,\cdots,\mathcal{A}w_r$是$\mathcal{A}W$的张成组，故 $r\ge\dim\mathcal{A}W=\dim V=n$

但是由于W是V的子空间，$r\le n\Rightarrow r=n\Rightarrow\dim W=n$

$\Rightarrow\mathbb{C}v=\{0\}$

V是有限维，$\mathcal{A}$是单射 $\Rightarrow\mathcal{A}$是同构. 故可逆

习题3.1.10. $u_1=(1,-1,1)$，$u_2=(1,1,1)$，$\alpha_1=(1,-1)$，$\alpha_2=(2,-1)$，$\alpha_3=(-3,1)$

$\beta_1=(1,0)$，$\beta_2=(0,1)$，$\beta_3=(1,1)$

1. 是否$\exists\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ st. $\mathcal{A}(u_1)=(1,0)$，$\mathcal{A}(u_2)=(2,0)$？

2. 是否$\exists\mathcal{B}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ st. $\forall j\in\{1,2,3\}$，均有 $\mathcal{B}(\alpha_j)=\beta_j$？

解：1) 令 $\mathcal{A}$：$\begin{array}{l} u_1 \longmapsto (1,0) \\ u_2 \longmapsto (2,0) \\ (1,0,0) \longmapsto (0,1) \end{array}$，由于 $u_1, u_2, (1,0,0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，故 $\mathcal{A}$ 可以扩充成 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 的线性映射，且满足要求

2) 注意到 $-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0$，若 $\mathcal{B}$ 是线性映射且满足 $\mathcal{B}(\alpha_j)=\beta_j\ \forall j$，

则 $-\beta_1+2\beta_2+\beta_3=\mathcal{B}(-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)=0$，而 $-\beta_1+2\beta_2+\beta_3=(0,3)\neq 0$。

故不存在。

习题 3.1.12. V 是有限维的 K-空间，$\mathcal{A}\in \mathrm{End}_K V$，证明：$\exists$ 非零 $f\in K[X]$ s.t. $f(\mathcal{A})=0$。

证：题目等价于证明 $\exists n\in\mathbb{N}$ s.t. $id_V, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \cdots, \mathcal{A}^n$ 在 $\mathrm{End}_K V$ 中线性相关

故只需证明 $\dim_K \mathrm{End}_K V<\infty$ 即可。

断言：若 $v_1,\cdots,v_m$ 为 V 的一组基，则 $\widehat{E_{ij}}: v_l \mapsto \delta_{jl} v_i \in \mathrm{End}_K V$ $\underset{}{\overset{i,j\in[\![1,m]\!]}{}}$ 是一组基

①线性无关显然，②$\forall \alpha\in\mathrm{End}_K V$，$\alpha$ 可由 v_j，$j\in[\![1,m]\!]$ 的像唯一决定。

令 $\alpha(v_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j$，则 $\alpha=\sum_{i,j} a_{ij}\widehat{E_{ji}}$

故 $\dim_K \mathrm{End}_K V=m^2$。

法II. 令 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 为 V 的一组基。$\dim_K V<\infty \Rightarrow \forall i\in[\![1,m]\!]$，$\exists f_i \overset{\neq 0}{\in} K[X]$ s.t. $f_i(\mathcal{A})v_i=0$

令 $f=f_1 f_2\cdots f_m \neq 0$，下证 $f(\mathcal{A})=0$。

$\forall v\in V$，$v=\sum a_i v_i$，则 $f(\mathcal{A})v = f_1(\mathcal{A}) f_2(\mathcal{A})\cdots f_m(\mathcal{A})(v)$

$= f_1(\mathcal{A}) f_2(\mathcal{A})\cdots f_m(\mathcal{A})(\sum a_i v_i)$

$= \widehat{f_1(\mathcal{A})} f_2(\mathcal{A})\cdots f_m(\mathcal{A})\cdot f_1(\mathcal{A})(a_1 v_1) + f_1(\mathcal{A})\widehat{f_2(\mathcal{A})}\cdots f_m(\mathcal{A}) f_2(\mathcal{A})(a_2 v_2)$

$+\cdots+ f_1(\mathcal{A})\cdots f_m(\mathcal{A})(a_m v_m)$

$= 0+0+\cdots+0=0$

习题 3.1.19. $V=K[X]$，$\mathcal{D}: f\mapsto f'$. $\mathcal{A}: \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+1}X^{i+1}$

1. 证明：$\mathcal{D}$ 满但不是单射.
2. 证明：$\mathcal{A}$ 线性，单满？
3. $\mathcal{A}\circ\mathcal{D}-\mathcal{D}\circ\mathcal{A}$ 的表达式.

证明：1. $\forall g(X)=\sum_{i=0}^{n} b_i X^i \in K[X]$，$\mathcal{D}(\sum_{i=0}^{n}\frac{b_i}{i+1}X^{i+1})=\sum_{i=0}^{n} b_i X^i = g(X)$；$\mathcal{D}(1)=\mathcal{D}(0)=0$

2. $\forall g_1(X)=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$，$g_2(X)=\sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in V$，不妨设 $n\le m$，$\mathcal{A}(g_1(X)+g_2(X))=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}(a_i+b_i)X^{i+1}+\sum_{i=n+1}^{m}\frac{b_i}{i+1}X^{i+1}$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1} + \sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{i+1} X^{i+1} = \mathcal{A}(f(X)) + \mathcal{A}(g(X))$$

$$\mathcal{A}(kf(X)) = \mathcal{A}\left(\sum a_i k X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{ka_i}{i+1} X^{i+1} = k\mathcal{A}f(X)$$

故 $\mathcal{A}$ 是线性映射.

单但不满：若 $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \ker\mathcal{A}$. 则 $\mathcal{A}(f(X)) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{X^{i+1}}{i+1} = 0$

$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n. \Rightarrow f(X) = 0$. 故 $\ker\mathcal{A} = 0$

$1 \notin \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$, 故不满

3. 令 $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$,

$$\mathcal{A}\mathcal{D} - \mathcal{D}\mathcal{A}(f(X)) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}\right) - \mathcal{D}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i a_i}{i} X^i - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(i+1) X^i$$

$$= -a_0$$

3.2.2. 证明: $\mathbb{C}^3$ 中 $\alpha_1 = (2i, 1, 0)$, $\alpha_2 = (2, -1, 1)$, $\alpha_3 = (0, 1+i, 1-i)$ 构成组基

再求标准基中在有序基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的坐标.

证.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2i & 1 & 0 \\ & 1 & & 2 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & 1+i & 1-i \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2i & 1 & 0 \\ i & 1 & & & i-1 & 1 \\ & & 1 & & 1+i & 1-i \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2i & 1 & 0 \\ i & 1 & & & i-1 & 1 \\ -1 & i & 1 & & & 1 \end{array}\right)$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 = 3 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一组基.

再继续做初等行变换. 可得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2i & 1 & \\ i+1 & 1-i & -1 & & i-1 & \\ -1 & i & 1 & & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+i & 1 & -\frac{i+1}{2} & 2i & & \\ -i & -1 & \frac{i+1}{2} & & 1 & \\ -1 & i & 1 & & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1-i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{i-1}{4} & 1 & & \\ -i & -1 & \frac{i+1}{2} & & 1 & \\ -1 & i & 1 & & & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \left(\frac{1-i}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{i-1}{4}\right)^T$, $\varepsilon_2 = \left(-i, -1, \frac{i+1}{2}\right)^T$, $\varepsilon_3 = (-1, i, 1)^T$

3.23 求 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$ 在 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 下的坐标. 其中 $\alpha_j = (\overbrace{1, \cdots, 1}^{j个}, 0, \cdots 0)$

解:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & & \\ -1 & \ddots & & & \ddots & \\ & -1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \alpha = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_2 - a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} - a_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

高代习题课 HW13

玟 2024.12.15

习题3.1.13. $U, W < V$, $V = U \oplus W$. 设 $P: V \to V: u+w \mapsto w$

$Q: V \to V: u+w \mapsto u$.

证明: 1) $P^2 = P$. $PQ = QP = 0$

2) 证明若 $W \neq V$, 则 P 不可逆

证明: 1) $\forall v \in V$, $\exists!\, u \in U$, $w \in W$, s.t. $v = u + w$

$P^2(v) = P(w) = w = P(v) \Rightarrow P^2 = P$.

$PQ(v) = P(u) = 0$, $QP(v) = Q(w) = 0$

$\Rightarrow PQ = QP = 0$

2) 由 $W \subsetneq V$, $\exists\, v \in V$ s.t. $v \notin W$. 又由于 $P(V) \subseteq W$, $P^{-1}(\{v\}) = \phi$.

故 P 不满, 不可逆

习题3.1.17. $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_K(V)$, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 证明

1) $\forall \alpha \in V$, $\exists!$ 的分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ 且 $\mathcal{A}\alpha_1 = \alpha_1$, $\mathcal{A}\alpha_2 = 0$.

2) 若 $\exists\, \alpha \in V$ s.t. $\mathcal{A}\alpha = -\alpha$, 则 $\alpha = 0$.

证: 1) $\alpha = \mathcal{A}\alpha + (\alpha - \mathcal{A}\alpha)$, 其中 $\mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}\alpha$, $\mathcal{A}(\alpha - \mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}\alpha - \mathcal{A}^2\alpha = 0$.

下证唯一性: 若 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 满足题意, 则 $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\alpha_1) + \mathcal{A}\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = \alpha - \mathcal{A}\alpha$.

2) $\alpha = -\mathcal{A}\alpha = -\mathcal{A}^2\alpha = -\mathcal{A}(-\alpha) = \mathcal{A}\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0$

思考题3.7 举例 $\mathrm{rank}(A+B) \overset{①}{\leq} \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$ 与 $\mathrm{rank}(AB) \overset{②}{\geq} \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$.

答: a. $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, ①取"=". b. $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, ①取"<"

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, ②取"=". d. $A = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, ②取">"

思考题3.8 $A, B \in M_n(K)$, $AB=BA$, $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 证: $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \geq \mathrm{rank}C + \mathrm{rank}AB$.

证: 令 $\mathcal{A}, \mathcal{B}: K^n \to K^n$, 且在标准基下对应矩阵 A, B.

考虑 $\mathcal{C}: K^n \to K^n \times K^n: v \longrightarrow (\mathcal{A}v, \mathcal{B}v)$, 在 $K^n \times K^n$ 中, 考虑基 $(\varepsilon_i, 0)$, $(0, \varepsilon_j)$

则 $\mathcal{C}$ 对应矩阵为 $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 且易证: $\ker \mathcal{C} = \ker \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}$. $i, j \in [\![1, n]\!]$.

$\forall v_1 \in \ker \mathcal{A}$, $v_2 \in \ker \mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}(v_1 + v_2) = \mathcal{B}\mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}v_2 = 0 \Rightarrow \ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} \subseteq \ker\mathcal{A}\mathcal{B}$

由维数公式, $\dim\ker\mathcal{A}\mathcal{B} \geq \dim(\ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B}) \geq \dim\ker\mathcal{A} + \dim\ker\mathcal{B} - \dim(\ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$

$= \dim\ker\mathcal{A} + \dim\ker\mathcal{B} - \dim\ker\mathcal{C}$

于是有 $\mathrm{rank}AB \leq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - \mathrm{rank}C$.

习题 3.2.4. 设 $a\in K$，证明：次数 $\le n$ 的多项式构成的空间 $K[X]_{\le n}$ 中，$1,(X+a),(X+a)^2,\cdots,(X+a)^n$ 是基。
再求 $f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ 在这组有序基下的坐标。

证：1) 令 $\sum_{i=0}^{n}a_i(X+a)^i=0$，其中 $a_i\in K$，$\forall i\in[0,n]$。且 $m=\max_{0\le i\le n}\{i: a_i\ne 0\}$

则 $a_m(X+a)^m=\sum_{i=0}^{m-1}(X+a)^i$，而 $\deg(a_m(X+a)^m)=m>\deg(\sum_{i=0}^{m-1}a_i(X+a)^i)$。

故 $a_i=0,\forall i$。即 $1,X+a,\cdots,(X+a)^n$ 线性无关，又 $\dim K[X]_{\le n}=n+1$。故是一组基。

2)
$$(1,Y-a,(Y-a)^2,\cdots,(Y-a)^n)=(1,Y,Y^2,\cdots,Y^n)\underbrace{\begin{pmatrix}1&-a&a^2&\cdots(-1)^na^n\\ &1&-2a&\cdots(-1)^{n-1}na^{n-1}\\ &&1&\vdots\\ &&&\ddots\ na\\ &&&1\end{pmatrix}}_{\text{令为}P}$$

令 $X=Y-a$，则 $(1,X,X^2,\cdots,X^n)=(1,(X+a),\cdots,(X+a)^n)P$.

注意到 $P=\left((-1)^{j-i}C_{j-1}^{i-1}a^{j-i}\right)_{1\le i,j\le n+1}$ 其中 $C_j^i=0,\forall i>j$. 于是有，

$$f(X)=(1,X,\cdots,X^n)\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(1,X+a,(X+a)^2,\cdots,(X+a)^n)P\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

$$=(1,X+a,\cdots,(X+a)^n)\left(\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-i}C_{j-1}^{i-1}a^{j-i}\cdot a_{j-1}\right)^T_{1\le i\le n}$$

习题 3.2.8. $f:K^4\to K^3$；$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{pmatrix}$

1). 证明：f 是线性映射。
2). 分别给出 $\mathrm{Ker}f$ 和 $\mathrm{Im}f$ 的一组基。
3). 考虑 K^4 的有序基 $B=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ 和 K^3 的有序基 (η_1,η_2,η_3) 其中

$\varepsilon_1=(1,0,1,1)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,0,1)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1,0)^T$，$\varepsilon_4=(0,0,2,1)^T$

$\eta_1=(1,1,1)^T$，$\eta_2=(1,0,-1)^T$，$\eta_3=(0,1,0)^T$

求矩阵 $M_{B,C}(f)$.

证：1) $\forall (x_i),(y_i)\in K^4$，$f((x_i)+(y_i))=\begin{pmatrix}-(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+2(x_3+y_3)+x_4+y_4\\-2(x_2+y_2)+(x_3+y_3)\\-(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)+(x_4+y_4)\end{pmatrix}=f((x_i))+f((y_i))$

$\forall k\in K$，$f(k(x_i))=\begin{pmatrix}k(-x_1+x_2+2x_3+x_4)\\k(-2x_2+x_3)\\k(-x_1-x_2+3x_3+x_4)\end{pmatrix}=k\cdot f((x_i))$

故 f 线性。

2) $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3+x_4=0\\-2x_2+x_3=0\\-x_1-x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2-2x_3-x_4=0\\-2x_2+x_3=0\end{cases}$. 一个基础解系为 $(1,\frac{1}{5},\frac{2}{5},0),(0,-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},1)$
故其为 $\mathrm{Ker}f$ 的一组基。

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix}-1&1&2&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&1&0\\1&-2&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathrm{Im}f$ 的一组基。 3) 在最后…

习题 8.2.12. $\mathcal{A},\mathcal{B}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $\mathcal{A}$ 平行于 $U: x+y=0$ 投向 $W: x-y=0$.

$\mathcal{B}$ 平行于 x 轴投向 y 轴.

求 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{AB}$ 在标准基下的矩阵.

解. 考虑 (x',y') 在 $\mathcal{A}$ 下的像, 即 $\begin{cases}x+y=x'+y'\\ x-y=0\end{cases} \Rightarrow (x,y)=(\frac{x'+y'}{2},\frac{x'+y'}{2})$

故 $\mathcal{A}\varepsilon_1=(\frac12,\frac12)$, $\mathcal{A}\varepsilon_2=(\frac12,\frac12) \Rightarrow \mathcal{A}$ 对应矩阵 $\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\ \frac12&\frac12\end{pmatrix}$

$\mathcal{B}(\varepsilon_1)=(0,0)$, $\mathcal{B}(\varepsilon_2)=(0,1) \Rightarrow \mathcal{B}$ 对应矩阵 $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\mathcal{AB}(\varepsilon_1)=0$, $\mathcal{AB}(\varepsilon_2)=\mathcal{A}(\varepsilon_2)=\frac12\varepsilon_1+\frac12\varepsilon_2 \Rightarrow \mathcal{AB}$ 对应矩阵 $\begin{pmatrix}0&\frac12\\0&\frac12\end{pmatrix}$

习题 8.2.13 α,β 为固定实数, $\beta\neq0$, $V=\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_6\rangle < Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 其中

$\varepsilon_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\varepsilon_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\varepsilon_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x$

$\varepsilon_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\varepsilon_5=\frac12x^2e^{\alpha x}\cos\beta x$ $\varepsilon_6=\frac12x^2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

1. 证明 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_6$ 构成 V 的一组基.

2. 设 $\mathcal{D}: V\to V: f\mapsto f'$. 求 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_6)$ 下的矩阵.

证: 1. 若 $\exists a_i\in\mathbb{R}$, 使 $\sum_{i=1}^{6}a_i\varepsilon_i=0$, 则 $a_1\cos\beta x+a_4x\sin\beta x+a_5\frac{x^2}{2}\cos\beta x$
$=a_2\sin\beta x+a_3x\cos\beta x+a_6\frac{x^2}{2}\sin\beta x$

等式左边是偶函数, 右边是奇函数. 故当且仅当两边均为零时, 等式成立.

令 $x=0$ 可得 $a_1=0$. 于是 $a_4\sin\beta x=-a_5\frac{x}{2}\cos\beta x$, $\forall x\neq0$.

令 $x=\frac{\pi}{\beta}$ 可得 $a_4=a_5=0$

对右边, 令 $x=\frac{\pi}{\beta}$, 可得 $a_3=0$. 再于是有 $\sin\beta x(a_2+a_6\frac{x^2}{2})=0 \Rightarrow a_2=a_6=0$.

故 $a_i=0$, $\forall i\in\{1,\cdots,6\}$, 即 ε_i, $i\in\{1,\cdots,6\}$ 线性无关. 故为一组基.

2. $\mathcal{D}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_6)=(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\cos\beta x+\alpha xe^{\alpha x}\cos\beta x-\beta xe^{\alpha x}\sin\beta x,$
$e^{\alpha x}\sin\beta x+\alpha xe^{\alpha x}\sin\beta x+\beta xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x+\alpha\frac{x^2}{2}e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta\frac{x^2}{2}e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x+\alpha\frac{x^2}{2}e^{\alpha x}\sin\beta x$
$+\beta\frac{x^2}{2}e^{\alpha x}\cos\beta x)$

$$=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_6)\begin{pmatrix}\alpha&\beta&1&&&\\-\beta&\alpha&&1&&\\&&\alpha&\beta&1&\\&&-\beta&\alpha&&1\\&&&&\alpha&\beta\\&&&&-\beta&\alpha\end{pmatrix}$$

习题 3.2.17. $T: V \to W$, $\dim V$ and $\dim W < \infty$, $U < V$, 证明: $\dim T(U) \geq \dim U - \dim V + \operatorname{rank}(T)$.

证明: 令 $T|_U : U \to W$; $u \mapsto T(u)$

则由秩-零化度定理, $\dim U - \dim T(U) = \dim U - \dim \operatorname{Im}(T|_U) = \dim \operatorname{Ker}(T|_U)$

且 $\dim V - \operatorname{rank} T = \dim V - \dim \operatorname{Im} T = \dim \ker T$.

故不等式由 $\dim \ker T \geq \dim \operatorname{Ker} T|_U$ 给出.

习题 3.2.18. $\mathcal{A}: V \to V$, $\dim V < \infty$. $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}^2)$. 求证: $V = \ker \mathcal{A} \oplus \operatorname{Im} \mathcal{A}$.

证明: 考虑 $\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}} : \operatorname{Im}\mathcal{A} \to V$; $v \mapsto \mathcal{A}(v)$.

由秩-零化度定理, $\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}) + \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}})$

由题, $\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 = \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}})$

故 $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}) = 0$. 即 $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}) = 0$

若 $v \in \ker \mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A}$, 则 $\mathcal{A}v = \mathcal{A}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

又由秩-零化度定理, $\dim V = \dim \ker \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{A}$.

所以有 $V = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{A}$.

习题 3.2.8.(3) 令标准基为 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in K^4$ 和 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in K^3$.

$$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4) = (\delta_1, \cdots, \delta_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\delta_1, \cdots, \delta_4) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\xi_1, \cdots, \xi_3) = (\eta_1, \cdots, \eta_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(\delta_1, \cdots, \delta_4) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & & 1 & 2 \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{B,\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 6 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

高代习题课 HW14

甘 2024.12.19

思考题3.11. 给定特征向量的对应特征值只有一个. 举例说明对于给定特征值可能有线性无关的两个特征向量 v_1, v_2.

证: ① 若 ξ 是一个特征向量, 则 $\mathcal{A}\xi=\lambda\xi$,

若 λ' 是 ξ 的另一个特征值, $\mathcal{A}\xi=\lambda'\xi=\lambda\xi \Rightarrow (\lambda'-\lambda)\xi=0$

由定义, $\xi\neq 0$. 故 $\lambda=\lambda'$.

② 考虑 $\mathbb{R}^2$ 空间中恒等变换 $Id_{\mathbb{R}^2}$, 其有特征值为1的两个线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

思考题3.10 $T: V\to W$, $\dim V, \dim W<\infty$, $r=\operatorname{rank} T$. 证明: 存在有序基 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 使 $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T)=\begin{pmatrix}I_r & \\ & \end{pmatrix}$

证: 任取定 V 与 W 的一组基 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{F}$,

$\operatorname{rank} M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T) = \operatorname{rank} T = r$,

故存在可逆阵 P, Q 使得 $P M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T) Q = \begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$

考虑有序基 $\mathcal{B}=\mathcal{E}Q$, $\mathcal{C}=\mathcal{F}P^{-1}$

则 $T\mathcal{B} = T\mathcal{E}Q = \mathcal{F}M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T)Q = \mathcal{C}PM_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(T)Q = \mathcal{C}\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$

此时, $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T)=\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$

习题3.3.2. $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 是 V 的基, $\mathcal{A}\in \operatorname{End} V$ 在 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 的矩阵是 $A=(a_{ij})$

1. 求 $\mathcal{A}$ 在 $(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ 下的矩阵 2. 求 $\mathcal{A}$ 在 $(\varepsilon_1,3\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下的矩阵

3. 求 $\mathcal{A}$ 在 $(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下的矩阵.

解: 1. $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}^{-1}$

$=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$

$=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\begin{pmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}$

2. $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,3\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{3}&\\&&1\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\varepsilon_1,3\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,3\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{3}&\\&&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}$

$=(\varepsilon_1,3\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}a_{11}&3a_{12}&a_{31}\\\frac{1}{3}a_{21}&a_{22}&\frac{1}{3}a_{23}\\a_{31}&3a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

3. $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\0&&1\end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\&&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{pmatrix}$

矩阵为 $\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12}&a_{22}-a_{12}&a_{23}-a_{13}\end{pmatrix}$

习题3.3.7. $\dim V<\infty$，$\mathscr{A}\in\operatorname{End}V$，$r=\operatorname{rank}\mathscr{A}$，TFAE：

1. $\mathscr{A}^2=0$，　2. $\operatorname{Im}\mathscr{A}\subseteq\ker\mathscr{A}$　3. ∃有序基 $\mathscr{B}$ s.t. $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}O_r & * \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

4. ∃有序基 $\mathscr{B}'$ s.t. $M_{\mathscr{B}'}(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}O_r & I_r & 0\\ O_r & O_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

证：$1\Rightarrow2$. $\forall v\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$，$\exists w\in V$ s.t. $\mathscr{A}w=v$，故 $\mathscr{A}v=\mathscr{A}^2w=0\Rightarrow v\in\ker\mathscr{A}$

$2\Rightarrow3$. 取 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的一组基 $v_1,v_2,\cdots,v_r$，扩充成 V 的一组基 $v_1,\cdots,v_n$ ($\dim V=n$)

则 $\forall i\in[\![1,r]\!]$，$\mathscr{A}v_i=0$ ($\operatorname{Im}\mathscr{A}\subseteq\ker\mathscr{A}$)．同时，$\forall i\in[\![1,n]\!]\setminus[\![1,r]\!]$，

$\mathscr{A}v_i\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$，故可用 $v_1,\cdots,v_r$ 线性表出，即 $\mathscr{A}v_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ji}v_j$

$$\mathscr{A}(v_1,\cdots,v_n)=(v_1,\cdots,v_n)\begin{pmatrix}O_r & a_{ij}\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{ij}$$

$3\Rightarrow4$. 法I.

假设 $\mathscr{B}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，由 $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$ 可知，$\mathscr{A}v_i$ 能被 $v_1,\cdots,v_r$ 线性表出，$\forall i$．

故 $\operatorname{Im}\mathscr{A}\subseteq\operatorname{span}\{v_1,\cdots,v_r\}$．又 $\operatorname{rank}\mathscr{A}=r$，则 $\operatorname{Im}\mathscr{A}=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_r)$

故 $\forall i\in[\![1,r]\!]$ $\exists v'_{r+i}\in V$ s.t. $\mathscr{A}v'_{r+i}=v_i$．

下证 $v_1,\cdots,v'_{2r}$ 线性无关：若 $\sum_{i=1}^{r}b_iv_i+b_{i+r}v'_{i+r}=0$，由于 $\forall i\in[\![1,r]\!]$，$\mathscr{A}v_i=0$，则

$$\sum_{i=1}^{2r}b_i\mathscr{A}v_i=\sum_{i=1}^{r}b_i\mathscr{A}v_i+\sum_{i=1}^{r}b_{i+r}\mathscr{A}v'_{i+r}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}b_{i+r}v'_{i+r}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{r}b_{i+r}\mathscr{A}v'_i=\sum_{i=1}^{r}b_{i+r}v_i=0\Rightarrow\forall i\in[\![1,r]\!],\ b_{i+r}=0.$$

代入原式，有 $\sum_{i=1}^{r}b_iv_i=0\Rightarrow\forall i\in[\![1,r]\!]$ $b_i=0$．

故 $v_1,\cdots,v_r,v'_{r+1},\cdots,v'_{2r}$ 线性无关．

将其扩充成 V 的一组基 $v_1,\cdots,v_r,v'_{r+1},\cdots,v'_n$

又由于 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 由 $v'_{r+1},\cdots,v'_{2r}$ 张成，$\forall i>2r$，$\mathscr{A}v'_i=0$．

即这组对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}O_r & I_r & 0\\ 0 & O_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$3\Rightarrow4$ 法II. $\operatorname{rank}\mathscr{A}=\operatorname{rank}M_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})=r$

故 ∃可逆阵 Q,P s.t. $Q*P=(I_r,0)$

令 $\mathscr{B}'=((v_1,\cdots,v_r)Q^{-1},(v_{r+1},\cdots,v_n)P)$

则

$$M_{\mathscr{B}'}(\mathscr{A})=\begin{pmatrix}O_r & Q*P\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O_r & I_r & 0\\ 0 & O_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$4\Rightarrow1$. $\mathscr{A}^2$ 在有序基 $\mathscr{B}'$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} & I_r\\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I_r\\ & \end{pmatrix}=0$

故 $\mathscr{A}^2=0$

习题3.3.8. 证明 $A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4\end{pmatrix}$ 和 $A'=\begin{pmatrix}3 & & & \\ & 4 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上相似．

证：$\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 4\end{pmatrix}$，　$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & & & 1\\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & & & 1\\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & & & \\ & 4 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2\end{pmatrix}$

故令 $P=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ ． $PAP^{-1}=A'$

而 $P^{-1}=P\in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$，即 A 与 A' 在 $\mathbb{Q}$ 上相似．

习题3.3.10 (6). $f_A: X\mapsto AX: \mathbb{C}^{n+1}\to\mathbb{C}^{n+1}$, $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$，求 f_A 的所有特征值与特征向量.

解：$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0\\ -4 & 8 & \lambda+2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} & -(\lambda-1)^2 & 0\\ 1 & \frac{\lambda+1}{4} & 0\\ & \lambda+9 & \lambda+2\end{pmatrix}$

可以看出 当 $\lambda+2=0$，即 $\lambda=-2$，或 $\lambda=1$ 时 $\mathrm{rank}(\lambda I-A)=2<3$．

故 $\lambda=-2$ 或 1 是 f_A 的特征值 且其他任何常数均不是 f_A 的特征值

考虑方程组 $(-2I_3-A)X=0$，解得 $X=\begin{pmatrix}0\\0\\x\end{pmatrix}$，$x\in\mathbb{C}$，$(I-A)X=0$ 解得 $X=x\begin{pmatrix}-3\\6\\-20\end{pmatrix}$，$x\in\mathbb{C}$.

故 f_A 的所有特征值为 $\{1,-2\}$，向量为 $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\x\end{pmatrix}: x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}\cup\left\{x\begin{pmatrix}-3\\6\\-20\end{pmatrix}: x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}$

习题3.3.11. $\mathcal{A}\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]_{\leq 4})$，$\mathcal{A}f(X):=Xf'(X)$. 求 $\mathcal{A}$ 的所有特征值和特征向量.

解：令 $f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4$

$\mathcal{A}f(X)=Xf'(X)=a_1X+2a_2X^2+3a_3X^3+4a_4X^4$

若有 $\mathcal{A}f(X)=\lambda f(X)$，则 $\begin{cases}0=\lambda a_0\\ a_1=\lambda a_1\\ 2a_2=\lambda a_2\\ 3a_3=\lambda a_3\\ 4a_4=\lambda a_4\end{cases}$

① 若 $\lambda=0$，则 $f(X)=a_0$

② 若 $\lambda\neq 0$，则 $a_0=0$ 且

a_1,a_2,a_3,a_4 中至多一个非零，

$\forall i\in[\![1,4]\!]$，$a_i\neq 0\Rightarrow \lambda=i$

故 $\mathcal{A}$ 的特征值为 0, 1, 2, 3, 4. 对应特征向量为 k, kX, kX^2, kX^3, kX^4

其中 k 为任一非零常数

习题3.3.12. 1. $\mathcal{U}=\mathbb{R}[X]$. $\mathcal{A}: \mathcal{U}\to\mathcal{U}$; $f\mapsto f'$. 求 $\mathcal{A}$ 所有特征值与特征向量.

2. $\mathcal{U}=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}: \mathcal{U}\to\mathcal{U}$; $(a_0,a_1,\cdots)\mapsto(0,a_0,a_1,\cdots)$. 证 $\mathcal{A}$ 无特征值.

解：1. 令 $f=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i\neq 0$ 满足 $\exists\lambda\in\mathbb{C}$ 使 $\mathcal{A}f=\lambda f$，即 $f'=\lambda f$.

当 $\deg f\geq 1$ 时，$\deg f'=\deg f-1<\deg f$. 故上式不能成立

当 $\deg f=0$ 时，即 $f=a_0$，$a_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 此时，$f'=0$。由于 $f\neq 0$，$\lambda=0$.

综上，$\mathcal{A}$ 仅有一个特征值 0. 且特征向量为非零常数多项式.

2. 反设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是一特征向量，特征值为 λ.

易知 $\lambda\neq 0$，否则 $\mathcal{A}(a_n)=(0,a_0,\cdots)=0$，即 $a_i=0$. $\forall i\in\mathbb{N}$. 与 $(a_n)\neq 0$ 矛盾!

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathcal{A}^{k+1}((a_n)) = (\underbrace{0,0,\cdots,0}_{前k+1位}, a_0, a_1, \cdots) = \lambda^{k+1}(a_n) = (\underbrace{\lambda^{k+1}a_0, \cdots, \lambda^{k+1}a_k}_{前k+1位}, \lambda^{k+1}a_{k+1}, \cdots)$$

可知 $\lambda^{k+1}a_k=0$，即 $a_k=0$．$\forall k\in\mathbb{N}$．故 $(a_n)_{n=1}^{\infty}=0$，矛盾

故 $\mathcal{A}$ 无特值向量，即无特征值

习题3.3.15．$\lambda_0\in\mathbb{R}$，$J=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}$．求证 J 与 J^T 相似．

法I．观察得

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \lambda_0 \\ & & \lambda_0 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ \lambda_0 & 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix} = J^T$$

法II．令 K^n 中的标准基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，在标准基下矩阵为 J 的线性变换为 $\mathcal{J}$，即

$$M_\varepsilon(\mathcal{J}) = J$$

则 $\mathcal{J}(\varepsilon_1)=\lambda_0\varepsilon_1$，$\mathcal{J}\varepsilon_2=\lambda_0\varepsilon_2+\varepsilon_1$，$\cdots$，$\mathcal{J}\varepsilon_n=\lambda_0\varepsilon_n+\varepsilon_{n-1}$

(想要找到另外一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，使 $\mathcal{J}(\xi_1)=\lambda_0\xi_1+\xi_2$，$\cdots$，$\mathcal{J}(\xi_{n-1})=\lambda_0\xi_{n-1}+\xi_n$，$\mathcal{J}\xi_n=\lambda_0\xi_n$

设 $\xi_n=\varepsilon_1$，$\xi_{n-1}=\varepsilon_2$，$\cdots$，$\xi_1=\varepsilon_n$，则满足 $M_\xi(\mathcal{J})=J^T$，而且

$(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，记 $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ 为 P，则有

$$J=M_\varepsilon(\mathcal{J}) = P^{-1}M_\xi(\mathcal{J})P = P^{-1}J^TP$$

故 J 与 J^T 相似．

习题3.2.10 令 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$．$f_A: M_2(K)\longrightarrow M_2(K)$；$X\longrightarrow AX$

1．求 $\ker f_A$ 与 $\operatorname{Im} f_A$ 的维数与基　2．求 f_A 在 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4)$ 下的矩阵 $M_\varepsilon(f_A)$

其中 $\varepsilon_1=E_{11}$，$\varepsilon_2=E_{12}$，$\varepsilon_3=I_2$，$\varepsilon_4=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$

解：1．考虑 $M_2(K)$ 的一组基 $\xi=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$，$f_A(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=\xi\begin{pmatrix}1 & & -1 & \\ & 1 & & -1\\ -4 & & 4 & \\ & -4 & & 4\end{pmatrix}$

故 $\operatorname{Im} f_A$ 一组基为 $\begin{pmatrix}1 & \\ -4 & \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} & 1\\ & -4\end{pmatrix}$，维数为2．且 $f_A(E_{11}+E_{21})=f_A(E_{12}+E_{22})=0$

故 $\dim\ker f_A = 4-\dim\operatorname{Im} f_A=2$，一组基为 $E_{11}+E_{21}$，$E_{12}+E_{22}$．

2．$\varepsilon=\xi\begin{pmatrix}1 & & 1 & \\ & 1 & & 1\\ & & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix}$ 则 $M_\varepsilon(f_A)=\begin{pmatrix}1 & & 1 & \\ & 1 & & 1\\ & & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix}^{-1}M_\xi(f_A)\begin{pmatrix}1 & & 1 & \\ & 1 & & 1\\ & & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & -1\\ & 1 & -1 & \\ & & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & -1 & \\ & 1 & & -1\\ -4 & & 4 & \\ & -4 & & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & 1 & \\ & 1 & & 1\\ & & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 3\\ 4 & 1 & 3 & -3\\ 0 & -4 & 4 & -4\\ -4 & 0 & -4 & 4\end{pmatrix}$

高代习题课 HW15

王 2024.12.21

思考题4.2. $L_1: \frac{x-x_1}{A_1}=\frac{y-y_1}{B_1}=\frac{z-z_1}{C_1}$ 和 $L_2: \frac{x-x_2}{A_2}=\frac{y-y_2}{B_2}=\frac{z-z_2}{C_2}$

解释以下事实：1. L_1与L_2重合 $\Leftrightarrow \alpha_1\times\alpha_2=\alpha_1\times\overrightarrow{P_1P_2}=0$

2. L_1与L_2平行但不重合 $\Leftrightarrow \alpha_1\times\alpha_2=0\neq\alpha_1\times\overrightarrow{P_1P_2}$

3. L_1与L_2相交于唯一点 $\Leftrightarrow \alpha_1\times\alpha_2\neq 0=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$

4. L_1与L_2异面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}\neq 0$.

其中 $P_i=(x_i,y_i,z_i)$，$\alpha_i=(A_i,B_i,C_i)$，$i=1,2$.

1.

$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\times\alpha_2=0\Leftrightarrow L_1 /\!/ L_2\\ \alpha_1\times\overrightarrow{P_1P_2}=0\Leftrightarrow L_1 /\!/ P_1P_2\end{array}\right\}\xLeftrightarrow{P_1\in L_1} L_1=L_2$

2.

$\alpha_1\times\alpha_2=0\Leftrightarrow L_1/\!/L_2$，$\alpha_1\times\overrightarrow{P_1P_2}\neq 0\Leftrightarrow L_1$不平行于$P_1P_2 \xLeftrightarrow{P_1\in L_1} P_2\notin L_1$

3.

$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\times\alpha_2\neq 0\Leftrightarrow L_1\text{与}L_2\text{不平行}\\ \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow L_1,L_2\text{共面}\end{array}\right\}\Leftrightarrow L_1$与$L_2$相交于唯一点，

4.

$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow P_2$不在含$P_1$，法向量为$\alpha_1\times\alpha_2$的平面上

$\Leftrightarrow L_1$与L_2异面

习题4.1.3. 计算行列式

解：$\begin{vmatrix} a & b & c\\ a & a+b & a+b+c\\ a & 2a+b & 3a+2b+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c\\ & a & a+b\\ & 2a & 3a+2b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c\\ & a & a+b\\ & & a\end{vmatrix}=a^3$，$\begin{vmatrix} x & y & x+y\\ y & x+y & x\\ x+y & x & y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ y & x+y & x\\ x+y & x & y\end{vmatrix}=-2(x+y)(x^2-xy+y^2)$

习题4.1.5. $A(1,-1,3)$，$B(2,0,-2)$，$C(0,-5,12)$，$D(2,1,0)$

1. 判断 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 是否构成右手系

2. 求平面ABC的一般方程.

1. $\overrightarrow{AB}=(1,1,-5)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,-4,9)$，$\overrightarrow{AD}=(1,2,-3)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(-11,-4,-9)\cdot(1,2,-3)=8>0$

故构成右手系

2. $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3\\ 1 & 1 & -5\\ -1 & -4 & 9\end{vmatrix}=-11x-4y-3z+6=0$

习题4.1.8 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}^{1\times3}$，证

1. 若$\alpha+\beta+\gamma=0$，则 $\alpha\times\beta=\beta\times\gamma=\gamma\times\alpha$

2. 若 $\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha=0$，则$\alpha,\beta,\gamma$线性相关

3. 若 $\alpha\times\beta=\gamma\times\delta$，$\alpha\times\gamma=\beta\times\delta$，则向量组 $\alpha-\delta$，$\beta-\gamma$ 线性相关.

证：1.

$$\left.\begin{aligned}\alpha\times\beta&=(-\beta-\gamma)\times\beta=-\beta\times\beta-\gamma\times\beta=\beta\times\gamma\\ \beta\times\gamma&=(-\alpha-\gamma)\times\gamma=-\alpha\times\gamma-\gamma\times\gamma=\gamma\times\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha\times\beta=\beta\times\gamma=\gamma\times\alpha$$

2. $(\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha)\cdot\alpha=\beta\times\gamma\cdot\alpha=0\Rightarrow\alpha,\beta,\gamma$ 线性相关

3. $\alpha\times\beta+\beta\times\delta=\gamma\times\delta+\alpha\times\gamma\Rightarrow(\alpha-\delta)\times\beta+(\alpha-\delta)\times\gamma=0$

$\Rightarrow(\alpha-\delta)\times(\beta-\gamma)=0\Rightarrow\alpha-\delta$ 与 $\beta-\gamma$ 线性相关

习题4.1.10 求平面π_1和π_2之间的距离.

$\pi_1: x-2y-2z-12=0$ $\quad\pi_2: x-2y-2z-6=0$

解：$P_1(12,0,0)\in\pi_1$，$P_2(6,0,0)\in\pi_2$

$\vec{n}=(1,-2,-2)\perp\pi_1\,\&\,\pi_2$

$$l=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2$$

习题4.2.2 设$n\geq2$，$f:M_n(K)\to K$ 是行线性函数. TFAE：

1. f交错 2. $\forall A\in M_n(K)$，A'为交换A第i行与第j行之后的矩阵，$f(A')+f(A)=0$

3. $\forall A\in M_n(K)$，$\hat{A}$为将A第i行乘上某个倍数加到第j行之后的矩阵，$f(\hat{A})=f(A)$

证：$1\Rightarrow2$. 令A的行向量为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 由反对称性，$f(A')=-f(A)$

$2\Rightarrow3$. 不妨设 $i<j$ 且倍数为λ，则

$$f(\hat{A})=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j+\lambda\alpha_i,\cdots)=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots)+f(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\lambda\alpha_i,\cdots)$$

$$=f(A)+\lambda f(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_i,\cdots)=f(A)+\tfrac{1}{2}\lambda\left(f(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_i\cdots)+f(\alpha_1,\cdots\alpha_i,\cdots\alpha_i\right.$$

$$=f(A)$$

$3\Rightarrow1$.

$$f(\hat{A})=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+\alpha_j,\cdots)=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots\alpha_i,\cdots)+f(A)=f(A)$$

$\Rightarrow f(\alpha_1,\cdots\alpha_i,\cdots,\alpha_i,\cdots)=0$，即$f$是交错的.

习题 4.2.3. 设 $n\geq 2$，$f: M_n(K)\to K$ 是交错型多重线性函数．证明：如果存在可逆矩阵 $M\in M_n(K)$ 使得 $f(M)=0$，则对任意 $A\in M_n(K)$ 均有 $f(A)=0$．

证：注意到对任意矩阵 $B\in M_n(K)$，第二类初等矩阵 $P=P_n(\lambda\cdot i)$，由线性性，我们有

$$f(PB)=\lambda f(B)$$ 且由 4.2.2，对第一、三类初等矩阵 P'，$f(P'B)=f(B)$ 或 $-f(B)$

同时可逆阵 M 可写成初等矩阵乘积，即 $M=P_r P_{r-1}\cdots P_1 I_n$，故

$$f(M)=f(P_rP_{r-1}\cdots P_1 I_n)=m\cdot f(I_n)=0$$ 其中 m 为非零常数

故 $f(I_n)=0$.

$\forall A\in M_n(K)$. 若 A 不可逆，$f(A)=0$ 为已知.

若 A 可逆，A 可写成 $A=A_kA_{k-1}\cdots A_1I_n$，其中 A_i 为初等矩阵.

$$f(A)=f(A_kA_{k-1}\cdots A_1I_n)=a\,f(I_n)=a\cdot 0=0.$$

故 $\forall A\in M_n(K)$，$f(A)=0$

习题 4.2.7. 计算行列式

1. $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+x & -x & -x & -x\\ 1 & -x & & \\ 1 & & y & \\ 1 & & & -y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & -x & -x\\ 1 & -x & & \\ 1 & & y & \\ 1 & & & -y\end{vmatrix}=x^2y^2+x^2y-x^2y=x^2y^2$$

4. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1 & b\\ 1 & 1 & 0 & c\\ a & b & c & d\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1 & b\\ 1 & 1 & 0 & c\\ \frac{a+b+c}{3} & b & c & d\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & & & a\\ 1 & -1 & & b\\ 1 & & -1 & c\\ \frac{a+b+c}{3} & \frac{-a+2b-c}{3} & \frac{-a-b+2c}{3} & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & & & a\\ & 1 & & b\\ & & 1 & c\\ -a+2b+2c & a-2b+c & a+b-2c & 3d\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & & b\\ & 1 & c\\ a-2b+c & a+b-2c & 3d\end{vmatrix}+(a-2b-2c)\begin{vmatrix} 1 & & a\\ & 1 & b\\ & & c\end{vmatrix}=3d-c(a+b-2c)-b(a-2b+c)+a(a-2b-2c)$$

$$=a^2+2b^2+2c^2-3ab-3ac-2bc-3d$$

5. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ a+b & a+b+2 & a+b+4 & a+b+6\\ a+c & a+c+2 & a+c+4 & a+c+6\\ a+d & a+d+2 & a+d+4 & a+d+6\end{vmatrix}\cdot(b-a)(c-a)(d-a)$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9\\ a+b & 2 & 4 & 6\\ a+c & 2 & 4 & 6\\ a+d & 2 & 4 & 6\end{vmatrix}(b-a)(c-a)(d-a)$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ a+b & 2 & 4 & 6 \\ c-b & & & \\ d-c & & & \end{vmatrix} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$= (c-d) \cdot \begin{vmatrix} 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$= 0$$

习题 4.2.10 计算行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ & \vdots & ⋰ & \\ & a_{n1} & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} \\ & a_{2,n-1} & a_{21} & & a_{2,n-2} \\ & & \vdots & & a_{3,n-2} \\ & & a_{n,1} & ⋰ & \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ & a_{2,n-1} & \cdots & a_{21} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$$

习题 4.2.13 n 为奇，$A \in M_n(K)$ 反对称，证明：$|A|=0$

证：$|A| = |-A^T| = (-1)^n |A^T| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$

高等代数习题课 HW16

甘 2024.12.26.

习题 4.2.23. $A=(a_{ij})\in M_{(n-1)\times n}(K)$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, 用 M_i 表示将 A 的第 i 列删去所得的 $n-1$ 阶方阵.

1. 证明: $X_0 := (M_1, -M_2, \cdots, (-1)^n M_n)^T$ 是 $AX=0$ 的一个解.
2. 假设 $\operatorname{rank} A = n-1$, 证明: $AX=0$ 的所有解都是 X_0 的常数倍.

证: 1. 考虑矩阵 $A_i^+ = \begin{pmatrix}\alpha_i\\ A\end{pmatrix}$, 将其行列式沿第1行展开.

令A第i行行向量为α_i, $i\in[\![1,n-1]\!]$

$|A_i^+| = M_1\cdot a_{i1} - M_2\cdot a_{i2} + \cdots + (-1)^n M_n\cdot a_{in} = 0$ (A_i^+ 行向量组线性相关)

观察到 $AX_0 = (|A_1^+|, |A_2^+|, \cdots, |A_{n-1}^+|) = 0$, 即 X_0 是 $AX=0$ 的一个解.

2. $AX=0$ 的解空间维数为 $n-\operatorname{rank} A = 1$, 只证 X_0 非零, 即有其所有解均为其常数倍.
由于 $\operatorname{rank} A = n-1$, 故其列向量组有一极大线性无关组 且有$n-1$个向量
设一极大线性无关组为 $\{\beta_1, \cdots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \cdots, \beta_n\}$, ($\beta_i$ 为A的第i列)
则 M_j 为列满秩, 故 $M_j \neq 0$. 即有 $X_0\neq 0$.

习题 4.2.24. $n\geq 2$. $A\in M_n(K)$, 证明:

1. A可逆 iff A^*可逆　　2. $|A^*| = |A|^{n-1}$

证: 1. 若A可逆, 则有A非奇异, 故 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 又 $|A|A^{-1}$可逆, 即A^*可逆
若A^*可逆, 假设A不可逆, 则有 $AA^* = |A|I_n = 0$, 即 $A = 0\cdot(A^*)^{-1} = 0$
此时 $A^*=0$ (由定义), 故矛盾.

2. 若A可逆 $|A^*| = \frac{|AA^*|}{|A|} = \frac{||A|I_n|}{|A|} = |A|^{n-1}$, 若$A$不可逆, 则 $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$

习题 4.2.25. $n\geq 2$, $A\in M_n(K)$, 证明:

1. $\forall c\in K$, $(cA)^* = c^{n-1}A^*$　　2. $(A^T)^* = (A^*)^T$　　3. $A=A^T \Rightarrow A^* = (A^*)^T$

证: 1. $(cA)^*_{ij} = (-1)^{i+j}\left|(cA)\binom{j}{i}\right| = (-1)^{i+j}\left|c\left(A\binom{j}{i}\right)\right| = c^{n-1}A^*_{ij}$, 即 $(cA)^* = c^{n-1}A^*$

2. $(A^T)^*_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A^T\binom{j}{i}\right| = (-1)^{i+j}\left|A\binom{i}{j}\right| = (A^*)^T_{ij}$

3. $(A^*)^T = (A^T)^* = A^*$

习题 4.2.26. 设 $n\geq 2$, $A\in M_n(k)$. 证明:

$$\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} n & \operatorname{rank} A = n \\ 1 & \operatorname{rank} A = n-1 \\ 0 & \operatorname{rank} A < n-1 \end{cases}$$

证: ① 若 $\operatorname{rank} A = n$, 由 4.2.24 可知 $\operatorname{rank} A^* = n$

② 若 $\operatorname{rank} A = n-1$, 则 $A^*A=0$, 故 $\operatorname{rank} A^* \leq \operatorname{rank} A^*A + n - \operatorname{rank} A = 1$

与题 4.2.23 讨论类似, 我们有 $A^*\neq 0$, 即 $\operatorname{rank} A^* = 1$

③ 若 $\operatorname{rank} A < n-2$, 则任取 $n-2$ 行行向量, 均线性无关, 故所有 $n-2$ 阶代数余子式均为 0. 即 $A^*=0$.

习题 4.2.33. 计算行列式

解: 令 $\begin{vmatrix} 7 & 5 & & & \\ 2 & 7 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 7 & 5 \\ & & & 2 & 7 \end{vmatrix} = A_n$, 则沿第一行展开有:

$$A_n = 7A_{n-1} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 & & & \\ & 7 & 5 & & \\ & 2 & 7 & 5 & \\ & & \ddots & \ddots & 5 \\ & & & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7A_{n-1} - 10A_{n-2}$$

$$A_n - 2A_{n-1} = 5(A_{n-1} - 2A_{n-2}) \text{ 且 } A_1 = 7,\ A_2 = 39$$

则 $\quad A_n - 2A_{n-1} = 5^{n-2}(A_2 - 2A_1) = 5^n$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_n}{5^n} = \frac{2}{5}\cdot\frac{A_{n-1}}{5^{n-1}} + 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{A_n}{5^n} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}\left(\frac{A_{n-1}}{5^{n-1}} - \frac{5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_n}{5^n} - \frac{5}{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{A_1}{5} - \frac{5}{3}\right) = -\frac{2^{n+1}}{3\cdot 5^n}$$

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

习题 4.2.34. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = b_1\cdots b_n \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & \cdots & a_1+b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= b_2b_3\cdots b_n\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1+b_1 & n=1 \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1) & n=2 \\ 0 & n>2 \end{cases}$$

习题 4.2.37 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & & \\ & -x_2 & x_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} =: A_n$$ ，将 A_n 沿第 n 列展开，则有 $A_n = x_n \cdot A_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \cdot (-1)^{n-1} x_1 \cdots x$

即 $A_n = x_n A_{n-1} + a_n x_1 \cdots x_{n-1}$ ，$n \geq 2$，

$A_1 = a_1$，$A_2 = a_1 x_2 + x_1 a_2$

若 $\exists i \in [\![2, n-1]\!]$ s.t. $x_i = 0$，则 $A_i = x_i A_{i-1} + a_i x_1 \cdots x_{i-1} = a_i x_1 \cdots x_{i-1}$

故 $A_n = a_i x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n = x_1 \cdots x_{i-1} a_i x_{i+1} \cdots x_n$

若 $x_1 = 0$，则 $A_n = a_1 \cdot x_2 \cdots x_n$，

若 $\forall x_i \neq 0$，则 $\dfrac{A_n}{x_1 \cdots x_n} = \dfrac{A_{n-1}}{x_1 \cdots x_{n-1}} + \dfrac{a_n}{x_n}$，故 $\dfrac{A_n}{x_1 \cdots x_n} = \dfrac{A_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{x_i}$

即 $A_n = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots x_{i-1} a_i x_{i+1} \cdots x_n$

综上，若 $\exists i \in [\![1, n]\!]$ s.t. $x_i = 0$，则 $A_n = x_1 \cdots a_i \cdots x_n$，

若 $\forall i \in [\![1, n]\!]$，$x_i \neq 0$，则 $A_n = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots x_{i-1} a_i x_{i+1} \cdots x_n$

习题 4.2.41. $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$，$f_i \in K[X]$ 是给定的 i 次多项式，首项系数为 a_i，设 $b_1, \cdots, b_n \in K$，

计算行列式 $\begin{vmatrix} f_0(b_1) & f_0(b_2) & \cdots & f_0(b_n) \\ f_1(b_1) & f_1(b_2) & \cdots & f_1(b_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(b_1) & f_{n-1}(b_2) & \cdots & f_{n-1}(b_n) \end{vmatrix}$

解：若 $\exists i \in [\![0, n-1]\!]$ s.t. $a_i = 0$，则 令 $j = \min\{i : a_i = 0\}$，

① $j = 1$，则 $f_0 = 0$，即行列式 $= 0$

② $j > 1$ 则 $f_j(X)$ 的次数为 $j-1$，且 $f_0, \cdots, f_{j-1}$ 的次数分别为 $0, 1, \cdots, j-1$.

故 f_j 可由 $f_0, \cdots, f_{j-1}$ 线性表出，故矩阵前 j 行线性相关.

故行列式为零

若 $\forall i$，$a_i \neq 0$，则可用前 i 行乘某倍数加到第 $i+1$ 行的方式将每一行均化成只含首项的单项式. 即 原式 $= \begin{vmatrix} a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} b_1^{n-1} & a_{n-1} b_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1} b_n^{n-1} \end{vmatrix} = a_0 \cdots a_{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$

综上，行列式值为 $\prod_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$.

习题 4.2.43. $M \in M_n(K)$，$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，A为可逆方阵.

证明：$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$

证：

$$M \xrightarrow{\cdot \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ & I_n \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} I_n & \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \cdot} \begin{pmatrix} A & \\ & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

故 $|M| = \begin{vmatrix} A & \\ & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$